MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Lista 4 - 2020
Claudia Cueva Candido e David Pires Dias

1. Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem das funções:

   a) $f(x,y) = x^3y^2 + 2x - y$

   b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$

   c) $f(x,y) = e^{x^3-y^4}$

   d) $f(x,y) = x^2\ln(x^2+y^4+xy)$

   e) $f(x,y) = \dfrac{xy^2 - x^2y}{x^2+y^2}$

   f) $f(x,y) = xye^{xy}$

   g) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

   h) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = x^2y^2g(xy)$, em g é função derivável de uma variável, tal que $g(-2) = 2$ e $g'(-2) = 3$. Calcule $f(1,-2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$.

3. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

   Sugestão: Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.

4. As funções dadas abaixo são diferenciáveis. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

   (a) $z = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$

   (b) $z = \ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$

   (c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$

   (d) $z = \mathrm{e}^x\ln y$, no ponto $(3,1,0)$

5. Determine o plano que passa por $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

6. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$.

7. **Contínua e não diferenciável** - O gráfico da função contínua f, dada por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ é uma folha de cone com vértice em $(0,0,0)$.

   a) Mostre que não existem derivadas parciais de f no $(0,0)$ e conclua que f não é diferenciável em $(0,0)$.

   b) Mostre que em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ f é de classe $\mathcal{C}^1$ e conclua que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

   c) Mostre que se $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, então o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0))$ passa pela origem.

8. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Mostre que existem as derivadas parciais de f no $(0,0)$.

b) Mostre que f não é contínua em $(0,0)$ e conclua que f não é diferenciável em $(0,0)$.

9. Sejam $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável com derivada contínua e $f(x,y) = x\ \psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

a) Mostre que f é diferenciável.

b) Mostre que todos os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

10. Considere a curva C dada pela equação $x^2 + 4y^2 + \operatorname{sen}(x - 2y) = 8$. Determine a equação da reta tangete a C no ponto $(2,1)$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável. Para um certo $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem equação $-2x+2y-z+3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que não pode ser a curva de nível de f que contém o ponto p:

a) $\gamma(t) = \left(-\frac{1}{t}, t\right)$ b) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$ c) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5},\ -\dfrac{2t^3}{3} +\ 3t\right)$

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável, com $\nabla f(-2,-2) = (h, -4)$ e seja $g(t) = f(2t^3 - 4t,\ t^4 - 3t)$. Determine h para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta de equação $y = 2x + 3$.

13. Determine a derivada direcional máxima de f em P e dê a direção e sentido em que ela ocorre.

a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y,\ P = (1,0)$ b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2),\ P = (1,2)$

c) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y}{z},\ P = (4,3,-1)$ d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z},\ P = (4,2,1)$

14. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ e seja $\gamma(t) = (t \cos t,\ t \operatorname{sen} t,\ \sqrt{t^2+4}),\ t \geq 0$. Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f. Faça um esboço.

15. Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

16. **Quádricas** - Esboce o conjunto dos pontos (x,y,z) do $\mathbb{R}^3$ tais que vale:

a) $z^2 = x^2 + y^2$ b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

c) $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$ d) $x^2 + 2y^2 - z^2 = -1$

e) $4x^2 - y^2 + z^2 = 0$ f) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$

g) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$ h) $x^2 + (y-1)^2 = 1$