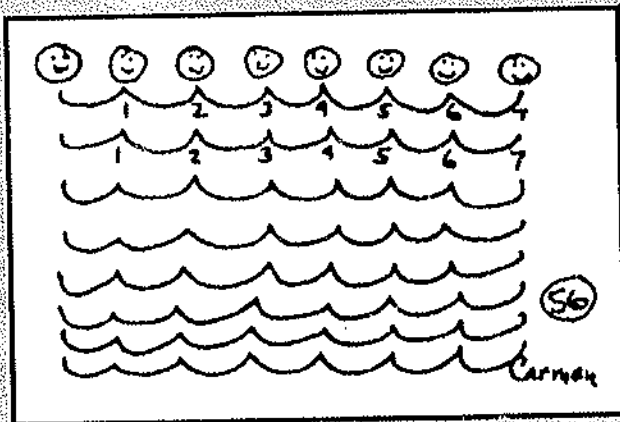


MEM/USU  
GEPEM

# AVALIAÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



*Paulo Abrantes*

Série Reflexões em Educação Matemática

MEM/USU-GEPEM

# Avaliação e Educação Matemática

Paulo Abrantes

---

APOIO CAPES/PADCT/SPEC

---

## CONSELHO EDITORIAL

Angela Valadares

Anna Averbuch

Circe Vital Brazil

Estela Kaufman Fainguelemt

Franca Cohem Gottlieb

Hernando Bedoya Rodriguez

Janete Bolite Frant

João Bosco Pitombeira de Carvalho

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes

Moema Lavínia Mariani de Sá Carvalho

Paulo Afonso Lopes

## ÍNDICE

Introdução .....	6
Capítulo 1. ....	9
<b>Avaliação como parte integrante do processo de aprendizagem da Matemática</b>	
• Os conceitos de avaliação	
• Funções das tarefas de avaliação	
• Princípios de avaliação	
• Alguns obstáculos a ter em conta	
Capítulo 2. ....	21
<b>Formas e instrumentos de avaliação</b>	
• Testes em “duas fases”	
• Relatórios	
Capítulo 3. ....	39
<b>Avaliação de actividades de resolução de problemas</b>	
• Algumas questões na avaliação da resolução de problemas em Matemática (tradução de um texto de Jeremy Kilpatrick)	
• Métodos de avaliação holística	
• A corrida de barreiras	
Capítulo 4 .....	60
<b>Trabalho de projecto e aprendizagem da Matemática</b>	
Alguns dados sobre o autor .....	87

## AVALIAÇÃO COMO PARTE INTEGRANTE DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Nos últimos anos, a avaliação tornou-se um dos temas mais discutidos na área da educação matemática. Em 1991, a *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) organizou um seminário para discutir especificamente este tema, do qual vieram a resultar dois livros (Niss, ed., 1993a, 1993b). O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) dos Estados Unidos da América, que em 1989 já reservara um capítulo à avaliação nos seus *Standards* ("Normas para o Currículo e a Avaliação na Matemática Escolar", na tradução portuguesa de 1991), publicou um número temático da revista *Mathematics Teacher* sobre "formas alternativas de avaliação" em Novembro de 1992, e dedicou o seu *Yearbook* de 1993 ao tema da avaliação na aula de Matemática. Ainda em 1993, o encontro anual promovido pela *Commission Internationale pour l'Étude et Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM) teve como tema central a avaliação, tendo as Actas deste encontro sido publicadas um ano mais tarde. Em Portugal, a avaliação tem sido, nos últimos anos, o tema de vários grupos de trabalho nos PROFMAT, e a APM levou a cabo, em 1991, um seminário do qual veio a resultar uma publicação intitulada "Avaliação em Matemática: uma Questão a Enfrentar".

Este crescente interesse pela avaliação parece resultar, acima de tudo, do facto de se terem produzido, desde o começo dos anos 80, um grande número de novas ideias e propostas sobre o ensino e a

aprendizagem da Matemática, muitas das quais dando origem a novos currículos e programas (tanto em projectos experimentais como ao nível nacional em diversos países) sem que novas práticas de avaliação tivessem acompanhado esta evolução. Talvez, como sugere Niss (1993a, p.4), "os ideais e objectivos da Educação Matemática nunca tenham estado realmente em consonância com os modos de avaliação disponíveis", mas a emergência de novos objectivos, novos métodos e novos conteúdos — a par de uma crescente expansão dos sistemas escolares que, há algumas décadas, proporcionavam uma formação matemática pós-elementar apenas a uma minoria de crianças e jovens — tem vindo a aumentar o fosso entre as perspectivas actuais sobre o ensino da Matemática e as práticas tradicionais de avaliação.

No entanto, embora no domínio da prática a avaliação pareça especialmente resistente à mudança, as novas ideias e teorias sobre o ensino e a aprendizagem têm provocado uma evolução do próprio conceito de avaliação.

### Os conceitos de avaliação<sup>1</sup>

O conceito de avaliação, bem como as suas funções no currículo escolar, tem evoluído nas últimas décadas. De um modo muito

<sup>1</sup> Esta secção do presente artigo, intitulada "Os conceitos de avaliação", bem como a seguinte, "Funções das tarefas de avaliação", são baseadas em partes do texto "Is it possible to integrate learning and assessment?", correspondente à conferência plenária proferida por Leonor Cunha Leal e Paulo Abrantes no 45º Encontro da CIEAEM. Este texto está incluído nas Actas do Encontro (ver, nas referências, CIEAEM, 1994).

esquemático, podem distinguir-se pelo menos três significados distintos atribuídos à avaliação.

#### **Avaliação como medida.**

Durante muito tempo, o ensino foi associado à transmissão de conhecimentos e a aprendizagem era vista como a capacidade de reproduzir aquilo que o professor ensinou. Nesta perspectiva, o processo de aprendizagem está fortemente ligado à memória e a ênfase está “nos resultados (comportamentos) e não no modo como a aprendizagem ocorre” (Romberg, 1993). A referência é o modelo do professor e a avaliação é encarada como a medida da diferença entre esse modelo e a forma como o aluno o reproduz. Esta medida é dada por uma *nota*, relacionada com a média de um grupo (em geral, a turma), e idealmente as notas podem ser ajustadas pelo modelo da curva normal.

A avaliação ocorre no fim de um ano ou de um certo período de aulas (Fig. 1). Quando o aluno tem uma nota baixa, a responsabilidade é em geral atribuída ao próprio aluno, sendo apontadas causas como falta de interesse, pouco trabalho ou baixa capacidade. Os resultados desta avaliação têm pouca ou nenhuma influência na prática do professor.

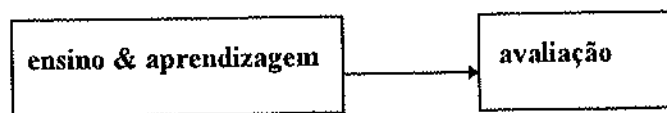


Fig.1

Os resultados desta avaliação não têm uma dimensão pedagógica, estando geralmente associados à progressão escolar dos alunos e à

certificação. Tais resultados servem para informar os pais, a escola ou os futuros empregadores, mas dizem muito pouco aos alunos sobre o seu processo de aprendizagem.

#### **Avaliação como distância.**

Associar a avaliação a uma medida levou, a certa altura, a uma preocupação com o rigor e a objectividade. Procuravam-se instrumentos que medissem os conhecimentos dos alunos de um modo “rigoroso” e independente da subjectividade da pessoa que decide, nomeadamente do professor. Embora tentativas para criar testes “normalizados” de vários tipos fossem já antigas, um novo problema era relacionar esses testes com o currículo escolar (Kilpatrick, 1993). Os esforços de Tyler, no sentido de estabelecer os principais tipos de objectivos educacionais e de os especificar em termos de comportamentos dos alunos, foram seguidos pelo trabalho de Benjamin Bloom que publicou em 1956 a sua conhecida taxonomia. Os objectivos eram separados em três domínios — cognitivo, afectivo e psicomotor, com o cognitivo a merecer mais atenção — e hierarquizados desde os mais simples até aos mais complexos.

Uma das consequências, em termos de avaliação, era deixar de considerar o modelo do professor e tomar como referência um conjunto de objectivos previamente definidos. As questões dos testes eram preparadas com base em matrizes de objectivos-conteúdos, isto é, tabelas de duas entradas nas quais uma das dimensões continha uma sequência dos tópicos do programa e a outra se referia aos níveis do domínio cognitivo da taxonomia de Bloom. O resultado da avaliação passava a ser encarado como uma medida da distância entre a resposta do aluno e o objectivo.

A "pedagogia por objectivos" emergente desta visão *behaviourista* introduziu dois novos modos de avaliação: a avaliação de diagnóstico, com a qual se pretende determinar se o aluno tem os pré-requisitos necessários para aprender os tópicos que se seguem no programa; e a avaliação formativa que ocorre durante o processo de ensino e aprendizagem com o propósito de informar se os objectivos pré-estabelecidos estão a ser alcançados ou se é preciso introduzir actividades de remediação. Curtos períodos de ensino são seguidos por momentos formais de avaliação (Fig. 2).

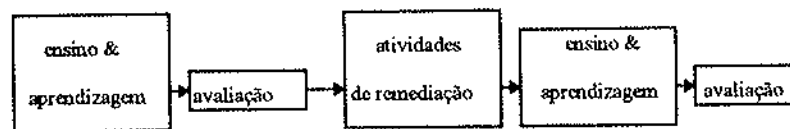


Fig. 2

De acordo com os resultados obtidos, e assumindo que os alunos têm diferentes ritmos de aprendizagem de um dado tópico, o professor decide da necessidade de propor mais actividades do mesmo tipo. O "rigor" da avaliação está ligado ao modo como os objectivos são operacionalizados, isto é, formulados em termos de comportamentos observáveis dos alunos.

#### Avaliação como interpretação.

Embora Bloom tenha introduzido uma dimensão pedagógica na avaliação, a concepção emergente da perspectiva *behaviourista* no que se refere ao papel formativo da avaliação é ainda muito estreita. De acordo com uma nova visão da aprendizagem, não é importante apenas a correcção ou incorrecção das respostas do aluno numa dada prova de avaliação mas também os processos que o levam a produzir

essas respostas. Mais do que controlar, a função do professor é interpretar, identificar problemas, gerar hipóteses explicativas. Mais do que medir o desvio em relação a comportamentos previamente determinados, importa compreender as razões do erro. O erro é uma fonte de informação essencial e não algo a ser tratado de um modo contabilístico ou que apenas se pretende evitar enquanto "comportamento observável". Se estamos doentes, não ficamos satisfeitos com um tratamento imediato que esconda os sintomas, queremos descobrir as causas da doença.

Segundo esta perspectiva, a avaliação é contínua e ocorre ao longo do processo de ensino e aprendizagem, e em estreita ligação com este processo (Fig. 3).

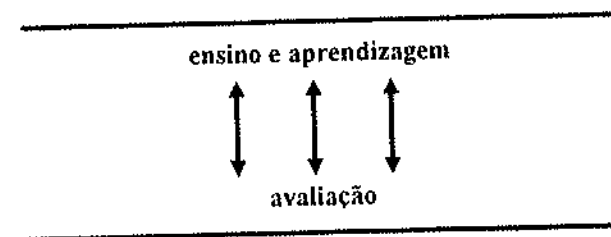


Fig. 3

A noção de "objectividade", antes entendida no sentido de medir rigorosamente a distância ao modelo do professor ou a comportamentos pré-determinados, dá lugar a uma preocupação central em produzir juízos que não conduzam o professor e o aluno a falsas pistas mas sim que os ajudem a compreender o que se passa. Além

disso, uma dimensão essencial está ligada à comunicação, à importância de produzir “uma mensagem que tenha sentido para aqueles que a recebem” (Hadgi, 1989, p. 178). Ou seja, para servir de facto um propósito pedagógico, o foco da avaliação não pode estar em medir informação mas sim em interpretá-la e em comunicar.

### **Funções das tarefas da avaliação**

A visão interpretativa da avaliação leva-nos a adoptar uma abordagem que considera a avaliação como parte integrante do processo de aprendizagem. Contudo, convém deixar claro que o objectivo é a aprendizagem e não a avaliação. No contexto da sala de aula, isto significa que as tarefas de avaliação não são nem o objectivo nem o fim de um processo. Uma outra implicação deste pressuposto é que a relevância das situações de aprendizagem não depende das possibilidades de avaliação imediata.

Esta perspectiva tende a atribuir às tarefas de avaliação um certo número de funções, designadamente gerar novas oportunidades para aprender e fornecer dados essenciais tanto ao professor como ao aluno.

Ver as tarefas de avaliação como fontes de aprendizagem implica que elas requerem actividades interessantes e significativas. Além disso, elas devem proporcionar aos alunos novas oportunidades para aprender, para melhorar e para reflectir sobre o seu próprio trabalho. Neste sentido, as tarefas de avaliação não correspondem a situações em que os alunos já não possam aprender e pensar para resolver os problemas propostos ou não possam melhorar as primeiras versões dos seus trabalhos.

Como fonte de informação para o professor, as tarefas de avaliação devem fornecer dados a respeito das aptidões, preferências e dificuldades de cada aluno. Este tipo de informação é essencial para que o professor compreenda o que se passa e constitui uma base para ele conceber e orientar futuras actividades de aprendizagem.

Enquanto informação relevante para os alunos, as tarefas de avaliação devem fornecer elementos que ajudem cada aluno na reflexão e na auto-regulação relativamente ao seu próprio processo de aprendizagem.

### **Princípios de avaliação**

Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática tem conduzido a uma insatisfação com as práticas tradicionais de avaliação e à procura de alternativas. Já em 1982, o relatório inglês Cockroft sublinhava a necessidade de se desenvolverem esforços para registar aspectos “que só podem ser avaliados pelo julgamento profissional do professor, tais como a persistência do aluno na resolução de um problema, a sua aptidão para fazer uso dos seus conhecimentos e a sua capacidade para discutir oralmente temas de Matemática”. Por sua vez, o NCTM (1989/91) afirma que tradicionalmente a avaliação tem focado a quantidade de conhecimentos dos alunos, uma perspectiva inadequada uma vez que hoje se reconhece que “a aprendizagem não é uma questão de acumulação mas sim de construção”; por isso, a avaliação do poder matemático dos alunos não pode reduzir-se a medir quanta informação eles possuem, devendo preocupar-se em determinar “até que ponto vai a sua capacidade e disposição para usar e comunicar essa informação”.

Se queremos avaliar não só os conhecimentos factuais que os alunos possuem mas também as capacidades que eles desenvolvem, se nos interessamos não só pelos aspectos cognitivos mas também por aqueles que são do domínio afectivo e social e que incluem atitudes e concepções dos alunos em relação à Matemática e à aprendizagem, então temos inevitavelmente que procurar formas e instrumentos de avaliação adequados. Os testes tradicionais, que são provas escritas, individuais, realizadas sem consulta e num período de tempo restrito, são insuficientes ou mesmo inadequados para avaliar a maior parte dos objectivos que hoje atribuímos aos currículos de Matemática.

Antes de abordar a questão dos instrumentos de avaliação, convirá reflectir um pouco sobre os princípios dessa avaliação. Inspirado em experiências anteriores — em particular na do projecto holandês Hewet (De Lange, 1987) — o Projecto MAT789, que constituiu uma experiência prolongada de inovação curricular desenvolvida em Lisboa entre 1988 e 1992, formulou do seguinte modo os princípios de avaliação:

(1) A avaliação deve gerar, ela própria, novas situações de aprendizagem.

(2) A avaliação deve ser consistente com os objectivos, os métodos e os principais tipos de actividades do currículo.

(3) A avaliação deve ter um carácter positivo, isto é, focar aquilo que o aluno já é capaz de fazer em vez daquilo que ele ainda não sabe, não se requerendo necessariamente o mesmo nível de desenvolvimento a todos os alunos.

(4) A avaliação, nas formas e instrumentos que utiliza, não deve estar dependente das possibilidades de se atribuírem classificações quantitativas aos alunos.

(5) A avaliação deve ocorrer num ambiente de transparência e confiança, no qual as críticas e sugestões sejam encaradas como naturais.

De acordo com estes princípios, o Projecto<sup>2</sup> concebeu e desenvolveu uma variedade de instrumentos de avaliação que usou de forma sistemática nas turmas experimentais (Leal, 1992; Leal e Abrantes, 1993; Abrantes, 1994). Estes aspectos são discutidos no capítulo seguinte da presente publicação.

#### Alguns obstáculos a ter em conta

As novas ideias no domínio da avaliação não são fáceis de concretizar. De um modo geral, os professores têm pouca experiência no uso de instrumentos distintos dos testes escritos usuais. Além disso, estes testes e os exames do mesmo tipo constituem uma tradição que está muito enraizada nas concepções da opinião pública, dos pais dos alunos, dos próprios alunos e até de muitos professores, e tendem a ser vistos como um meio mais "objectivo" ou mais "rigoroso" de avaliação quando comparados com métodos mais abertos e que se baseiam no julgamento "subjectivo" dos professores na sala de aula.

De facto, os professores estão hoje confrontados com algumas contradições do próprio sistema educativo. Os novos programas tendem a assumir uma visão mais "construtiva" da aprendizagem,

---

<sup>2</sup> A Equipa do Projecto MAT789 incluiu Eduardo Veloso, Leonor Cunha Leal, Margarida Silva Oliveira, Paula Teixeira e Paulo Abrantes. O Projecto foi apoiado pelo Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e foi financiado pela Fundação Calouste Gulbenkian.

colocando no primeiro plano a capacidade de resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação, recomendando o trabalho em grupo e uma participação mais activa dos alunos no processo de aprendizagem, chamando a atenção para a importância dos objectivos de natureza afectiva e do domínio das atitudes; mas, ao mesmo tempo, os testes e exames escritos continuam a exercer uma influência decisiva como forma de controlo sobre o ensino e a aprendizagem. Isto obriga o professor a gerir as tensões resultantes de assumir uma perspectiva que vê o ensino e a avaliação de uma forma integrada e que privilegia o papel formativo da avaliação, dentro de um sistema que valoriza essencialmente a avaliação sumativa.

Estas dificuldades não podem ser ignoradas nem subestimadas. No entanto, parece necessário que os professores vão desenvolvendo ideias e experiência na concepção e uso de formas mais justas de avaliação que não representem apenas uma "revolta" contra uma prática tradicional inadequada mas que sejam, em si mesmas, cada vez mais consistentes e convincentes. Trata-se de uma tarefa gigantesca que um professor não conseguirá realizar isoladamente mas que requer um trabalho persistente, desenvolvido em cooperação por equipas de professores, tanto ao nível da escola como de projectos de inovação de âmbito mais alargado.

#### Referências bibliográficas:

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática*. Tese de doutoramento. Lisboa: DEFCUL.
- APM (1991). *Avaliação: uma questão a enfrentar*. Lisboa: APM.
- Bloom, B. et al. (1956). *Taxonomy of educational objectives (Cognitive domain)*. Longman.
- CIEAEM (1994). *L'Évaluation centrée sur l'élève*. Lucia Grugnetti (ed.), Actas do 45º Encontro da CIEAEM, Cagliari, Itália.
- Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts* (report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools). Londres: Her Majesty Stationery Office.
- De Lange, Jan (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht: OW&OC.
- Hadji, C. (1989). *L'évaluation, règles du jeu: des intentions aux outils*. Paris: ESF Ed.
- Küpatrick, J. (1993). The chain and the arrow: from the history of mathematics assessment. Em Mogens Niss (ed.), *Investigations into assessment in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular*. Tese de mestrado. Lisboa: DEFCUL.
- Leal, L. C. & Abrantes, P. (1993). Assessment in an innovative curriculum project for mathematics in grades 7-9 in Portugal. Em Mogens Niss (ed.), *Cases of assessment in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Va. [Tradução portuguesa: "Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar", Lisboa, APM/IEE, 1991]
- NCTM (1992). *The Mathematics Teacher*, vol. 85, nº8.
- NCTM (1993). *Assessment in the mathematics class: som. 1993 Yearbook*. Reston, Va.
- Niss, Mogens (ed.) (1993). *Investigations into assessment in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Niss, Mogens (ed.) (1993). *Cases of assessment in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Romberg, T. (1993). How one comes to know: models and theories of the learning of mathematics. Em Mogens Niss (ed.), *Investigations into assessment in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.



## FORMAS E INSTRUMENTOS DE AVALIAÇÃO

Neste capítulo incluem-se exemplos de alguns tipos de instrumentos de avaliação que foram criados e usados pelo Projecto MAT789, no âmbito do currículo experimental de Matemática para os 7º, 8º e 9º anos de escolaridade que este Projecto desenvolveu entre 1988 e 1992, trabalhando directamente com alunos de quatro turmas de duas escolas da área de Lisboa.

De acordo com os princípios referidos no capítulo anterior, o Projecto foi criando uma variedade de instrumentos de avaliação, que eram complementares do ponto de vista do tipo de informação que forneciam:

- Relatórios e ensaios: produções escritas dos alunos, ora individuais ora em pequenos grupos, realizadas (algumas vezes em casa, outras na aula) sobre problemas e situações problemáticas.
- Produtos gerados pelos alunos, individualmente ou em grupo, no decorrer de projectos prolongados em que se envolveram.
- Testes em duas fases: testes escritos individuais realizados, numa primeira fase, na aula, com consulta e durante um período de duas horas, e, numa segunda fase, retomados em casa durante um período de uma semana, depois de o professor ter feito uma primeira apreciação e ter dado a cada aluno pistas e sugestões para melhorar ou desenvolver o seu trabalho inicial.
- Pequenas tarefas orais consistindo na apresentação, por um grupo, sobre a forma como resolveu um problema ou elaborou um trabalho, em geral seguida de crítica pela professora e pelos colegas.

- Entrevistas individuais (ou em pequenos grupos) e questionários.
- Observação do trabalho dos alunos nas aulas, seguida de reflexão e discussão (no seio da equipa do Projecto) sobre ocorrências significativas.

A criação de um sistema de avaliação satisfatório não foi imediata mas, de um modo geral, a avaliação terá deixado de constituir um motivo de especiais preocupações a partir do momento em que os alunos começaram a compreender o sistema e os professores a adquirir confiança na sua gestão. Havendo produtos frequentes e variados do trabalho realizado, e merecendo todos eles a mesma atenção da parte da professora, os alunos não tendiam a sobrevalorizar a importância dos testes que eram, aliás, pouco frequentes e feitos de um modo invulgar.

Uma das características dos processos de avaliação era o facto de não se considerar como definitivo o trabalho realizado por um aluno ou um grupo. Não eram só os testes que eram em duas fases. Ao elaborar um relatório, os alunos eram encorajados a consultar o professor ou mesmo a mostrar uma versão preliminar. Além disso, depois de analisado pelo professor, o trabalho era por vezes devolvido ao aluno com sugestões para ser repensado e melhorado. Só após este ciclo é que o professor atribuía uma classificação qualitativa (do tipo *Muito Bom*, *Bom*, *Satisfatório* ou *Fracó*), acompanhada normalmente de comentários.

A consistência da avaliação com os objectivos e as metodologias era uma preocupação permanente. Nalguns instrumentos, este problema não se coloca visto que as actividades de aprendizagem são, ao mesmo tempo, actividades de avaliação. É o que se passa com os relatórios ou com os projectos: não se realiza um projecto para aprender, seguido de outro para verificar se o aluno já aprendeu... A integração de aprendizagem e avaliação é um ponto forte deste tipo de actividades.

No caso dos testes, ainda que o formato em duas fases reduzisse a distância entre tarefas para aprender e tarefas para avaliar, a situação é diferente. Foi preciso atender ao modo de trabalho habitual nas aulas. Por exemplo, um teste de Geometria no 7º ano incluiu problemas em que era necessário fazer construções em cartolina; num teste do 9º ano, uma parte era feita no computador e os alunos entregavam a folha de respostas e uma disquete com o seu trabalho sobre um dado problema.

Um aspecto importante do processo de avaliação (como de todas as actividades do currículo) era o facto de os alunos disporem de bastante tempo para realizar as tarefas e para reflectir sobre elas. Apesar disso, os prazos estabelecidos deviam ser respeitados: houve situações em que a segunda fase de um teste ou um relatório não foi aceite porque o aluno tinha ultrapassado, sem justificação, os prazos definidos.

A primeira parte deste capítulo é dedicada aos testes em duas fases. Depois de se referir a sua origem e modo de funcionamento, apresenta-se e comenta-se um exemplo de um destes testes, tal como foi proposto aos alunos do currículo experimental. Incluiu-se ainda uma proposta de actividade que tem o objectivo de proporcionar alguma prática e discussão sobre o processo de apreciar as primeiras respostas dos alunos a um problema e dar-lhes sugestões apropriadas para melhorarem ou desenvolverem essas respostas numa segunda fase.

Na segunda parte, apresenta-se um exemplo de uma actividade na qual é proposto aos alunos que elaborem um relatório sobre uma dada situação problemática. Também aqui o propósito é motivar a discussão sobre as formas mais adequadas de avaliar este tipo de produções dos alunos.

O trabalho de projecto é tratado no último capítulo da presente publicação.

## Testes em “duas fases”

Os testes “em duas fases” foram desenvolvidos originalmente na Holanda, pelo Projecto Hewet, com alunos dos últimos anos do Secundário. O Projecto MAT789 adaptou a ideia para alunos mais novos. As questões propostas incluíam: (i) perguntas de interpretação, justificações e problemas de resolução relativamente rápida, e (ii) alguns problemas abertos requerendo investigação e respostas mais desenvolvidas. Em qualquer dos casos, não se pedia a reprodução de definições ou regras tanto mais que os alunos podiam consultar cadernos e apontamentos. Mas pedia-se que as respostas fossem pormenorizadas e explicadas.

A ideia era que, na primeira fase, cada aluno resolvesse as questões de tipo (i) e começasse a trabalhar as de tipo (ii), esperando-se que, na segunda fase, corrigisse ou melhorasse as respostas às primeiras (se fosse caso disso) e desenvolvesse as segundas. As pistas e sugestões dadas pelo professor ao avaliar a primeira fase, variáveis consoante as respostas, desempenhavam um papel crucial no trabalho subsequente dos alunos.

Depois da primeira fase, o professor apreciava cada resposta e escrevia, se tal se justificasse, um comentário ou uma sugestão na folha do aluno. Ao mesmo tempo, registava, apenas para si, uma pontuação. Esta pontuação era atribuída geralmente numa escala 1-4 e correspondia a uma classificação “por impressão geral” ou, com mais frequência, a uma classificação “holística focada” — segundo a terminologia de Charles et al., 1987 (explicada no capítulo 3):

- 1 ponto para uma resposta incorrecta ou sem sentido;

- 2 pontos para uma resposta não aceitável mas revelando alguma compreensão e trabalho;

- 3 pontos para uma resposta correcta ou, em questões abertas e de desenvolvimento, aceitável como primeira versão;

- 4 pontos para uma resposta excelente.

Além disso, o professor anotava referências a respostas invulgares ou difíceis de interpretar. Estes elementos ajudavam a fazer uma avaliação de cada teste e da reacção da turma a cada problema, mas sobretudo serviam para apreciar a evolução da primeira para a segunda fase. De qualquer modo, os alunos entregavam de novo as suas primeiras respostas em conjunto com as segundas. No final do processo, o professor atribuía a cada aluno uma única classificação qualitativa global, por vezes acompanhada de um comentário adicional.

No exemplo seguinte, reproduz-se o enunciado de um teste proposto no 7º ano de escolaridade, sobre o tema “Números Naturais”, depois de os alunos terem trabalhado este tema nas aulas ao longo de um período de cerca de quatro semanas.

## Teste de avaliação

*Podes resolver as questões seguintes pela ordem que quiseres.*

*Utiliza a tua calculadora e consulta os textos de apoio ou o teu caderno sempre que achares conveniente.*

*Se nalgumas questões não tiveres tempo para dar respostas tão completas como gostarias, não te esqueças que o teste tem duas fases pelo que terás uma segunda oportunidade para as desenvolver.*

1. Qual é o menor número natural que tem exactamente 5 divisores?
2. Dois números naturais dizem-se primos entre si quando não têm divisores comuns à excepção do 1. Por exemplo, 4 e 9 são primos entre si, assim como 8 e 15.  
Qual será o mínimo múltiplo comum de dois números primos entre si? Porquê? Tenta escrever um enunciado geral que se aplique a estes casos.
3. “Se o produto de dois números é par então os números são ambos pares”.  
Será isto verdade? Comenta.
4. Recorda que o jogo do *Trinca-Espinhas* consiste no seguinte: há uma lista de números, tu tiras um à tua escolha (desde que tenha divisores na lista), e o *Trinca-Espinhas* fica precisamente com os divisores desse número; o processo repete-se até que já não possas tirar qualquer número da lista, ficando os que sobrarem para o *Trinca-Espinhas*. A pontuação de cada um é a soma dos números respectivos.  
Imagina que estás a jogar com os números naturais de 1 a 10. Como farias? Explica a tua estratégia.
5. Uma pessoa está doente e tem que tomar, por receita médica, dois medicamentos (A e B). O medicamento A deve ser tomado de 4 em 4

horas e o medicamento B de 10 em 10 horas. A pessoa começou a tomar ambos às 8 horas da manhã de um determinado dia.

Quando é que voltará a tomar os dois medicamentos ao mesmo tempo?

6. Aprendeste já três métodos para determinar o máximo divisor comum (mdc) de dois números.

Em anos anteriores, sabias calcular o mdc de dois números a partir dos respectivos conjuntos de divisores.

Aprendeste também a utilizar a decomposição em factores primos dos números para o cálculo do seu mdc.

No texto de apoio, está explicado um outro método, o algoritmo de Euclides.

Procura agora responder à seguinte questão: em que casos te parece mais indicado usar um ou outro destes métodos?

Faz as experiências que te pareçam necessárias para formares uma opinião e apresenta-as conjuntamente com a tua resposta.

7. Imagina um código que permita a comunicação em português e que utilize apenas três símbolos: +, \*, o.

Inventa um código desse tipo, procurando que ele seja o mais prático possível na maneira de representar as letras, algarismos e outros caracteres necessários à comunicação.

Tenta explicar as razões que te levaram a construir o código dessa maneira e não de outra.

As questões 4, 6 e 7 são claramente de resposta aberta. Nas outras, há respostas previamente classificáveis em certas e erradas mas as estratégias e explicações possíveis são muito diferentes.

Por exemplo, a questão 1 pode ser resolvida (a) por tentativas, (b) a partir de uma reflexão sobre quais os números que podem ter um número ímpar de divisores, ou (c) com base na relação entre o número de divisores e os expoentes dos factores. Mesmo em cada uma destas opções há respostas qualitativamente diferentes. Por exemplo, pode-se

resolver por tentativas mas ver que alguns números devem ser logo excluídos.

A questão 5 pode ser resolvida com o auxílio de um esquema ou, mais formalmente, recorrendo-se à noção de mínimo múltiplo comum.

Nas questões 2 e 3, a qualidade da argumentação pode ser muito variável.

Um aspecto saliente é que respostas igualmente classificáveis como correctas podem revelar diferentes níveis de aprendizagem.

Nas questões abertas, as respostas da primeira fase (mesmo as mais satisfatórias) podem ser muito melhoradas se o aluno dispõe de tempo e de sugestões apropriadas. Na questão sobre o *Trinca-Espinhas*, por exemplo, duas alunas não responderam porque não se haviam interessado pelo jogo quando este foi trabalhado na aula mas, na segunda fase, usaram de novo o computador e conseguiram responder. Outros propuseram estratégias ganhadoras mas foram convidados a procurar obter a máxima pontuação possível. Outros ainda, com respostas muito boas na primeira fase, foram encorajados a descrever melhor a sua estratégia ou a discutir a validade desta com uma sequência maior de números.

Este tipo de teste revelou-se adequado aos princípios de avaliação, ao proporcionar novas ocasiões para aprender, ao assumir carácter positivo e ao reduzir o medo de errar (uma aluna considerou mesmo que "é como ter uma aula outra vez"). A experiência sugeriu, por outro lado, que eram precisos cuidados especiais:

- na escolha e formulação das questões — nem todas as questões serão igualmente apropriadas para um teste em duas fases;
- nas sugestões para a segunda fase — que serão variáveis de uns alunos para outros e que o professor tem que formular em função de

cada resposta; e da sua expectativa sobre as possibilidades do aluno respectivo;

- no momento de realização dos testes — por exemplo, evitando fazê-los coincidir com o final dos períodos escolares de modo a que os alunos e os pais não lhes atribuam uma importância excessiva face a outros instrumentos de avaliação.

A actividade seguinte é aqui incluída com o propósito de proporcionar uma reflexão sobre o papel do professor no momento de apreciar as respostas dadas por vários alunos a um dado problema e de decidir quais serão, para cada um, as pistas e sugestões mais apropriadas para a segunda fase.

#### Problema (7º ano de escolaridade):

Dois números primos dizem-se “gémeos” se são números ímpares consecutivos. Por exemplo, 5 e 7 são números primos gémeos.

Que se poderá afirmar sobre o número que fica entre dois primos gémeos maiores que 3? Faz as experiências que achares necessárias e explica a tua resposta.

João:

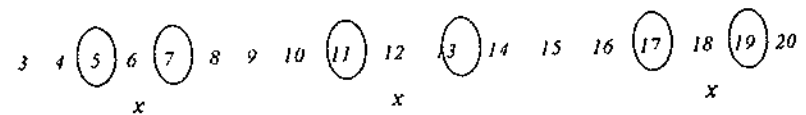
*Os números primos são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. Então vê-se que 3 e 5 são gémeos, 5 e 7 também, assim como 11 e 13. Os que estão no meio deles são o 4, o 6 e o 12. Eu acho que têm que ser sempre números pares.*

Ana Luísa:

*Exemplos: 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19. O número que fica entre eles é o 6, depois o 12, depois o 18. Estes números são os múltiplos de 6.*

Ricardo:

*Entre dois números ímpares tem que ficar um número par. Eu fiz um esquema:*



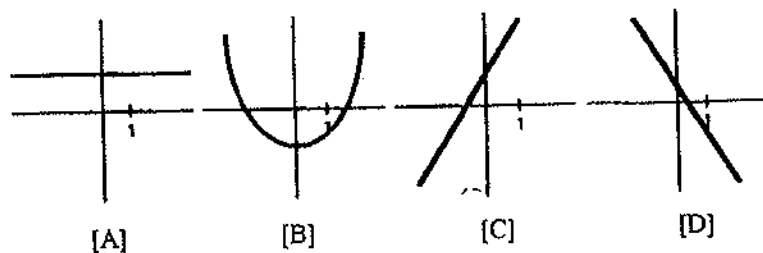
*Alguns números ímpares não são primos, por exemplo o 9 e o 15. Eles não são primos porque são múltiplos de 3. Os outros múltiplos de 3 no meio destes são pares, por exemplo o 6, o 12 e o 18. Eu acho que estes é que podem estar entre dois gémeos e realmente o 6 está entre o 5 e o 7, o 12 está entre o 11 e o 13, e o 18 está entre o 17 e o 19.*

Teresa:

*Se são ímpares, entre eles tem que ficar um número par. E se são maiores que 3, o número par tem que ser maior do que 4.*

**Problema (8º ano de escolaridade):**

Observa com atenção os quatro gráficos seguintes:



Qual deles poderá representar a função de  $Q$  em  $Q$  definida por  $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$ ?

Porquê?

Rui:

É o gráfico C. Eu dei alguns valores e fiz uma tabela:

0	1
1	2,5
2	4

e estes valores só dão para o gráfico C.

Joana:

O gráfico A não pode ser porque as imagens são todas iguais. O B também não porque é uma função em que o  $x$  devia estar elevado ao quadrado. Do C e do D não sei bem, acho que não temos dados suficientes para responder.

Isabel:

O A não é porque é uma função em que o  $x$  não importa. O B não é porque representa uma função em que o  $x$  tem um expoente 2 ou 4 por exemplo. E o D também não é porque é de uma função como  $-2x + 1$  (ou  $0,5$ ), não sei bem se é  $-2$  mas é um número negativo. Então só pode ser o C e realmente o  $x$  está positivo e o gráfico passa mais ou menos no 1 mas também não podemos ter a certeza porque não está bem feito em papel milimétrico.

## Relatórios

A elaboração pelos alunos de ensaios ou relatórios sobre situações problemáticas em torno das quais fizeram algum trabalho de exploração ou de investigação pode constituir, ao mesmo tempo, um factor de aprendizagem e um elemento significativo de avaliação. Num interessante artigo (de que se inclui uma tradução no capítulo 3 desta publicação), J. Kilpatrick, ao discutir o problema da avaliação, compara mesmo a resolução de problemas de Matemática com a tarefa de escrever uma composição, atribuindo um papel central ao aspecto da comunicação.

Na experiência do Projecto MAT789, os alunos foram confrontados por diversas vezes com a tarefa de elaborar relatórios, nalgumas ocasiões em pequenos grupos e noutras como uma tarefa de natureza individual.

Um exemplo foi o "trabalho das matrículas". Depois de uma unidade em que os alunos (no 7º ano) trabalharam sobre diversos problemas de contagem que envolviam processos combinatórios, uma das actividades para fazer em casa ao longo de uma semana dizia respeito à questão de saber se o sistema português de matrículas de automóveis era adequado e que alternativas poderiam ser consideradas. Os alunos receberam elementos sobre sistemas de diversos países, alterações ocorridas e dados de natureza demográfica, e foram encorajados a procurar outras informações pertinentes. Deviam comentar uma carta (autêntica) publicada numa revista, na qual um leitor defendia um ponto de vista sobre o problema, baseado em argumentos numéricos pouco claros. O comentário incluiria, se fosse caso disso, uma proposta fundamentada para um novo sistema a usar no nosso país.

O trabalho dos alunos poderia ser melhorado depois de criticado pela professora, dando origem a uma segunda versão. De resto, foi isso que sucedeu com muitos alunos. Além disso, os alunos foram encorajados a mostrar versões preliminares e a trocar impressões com a professora antes de entregarem o seu trabalho.

A avaliação deste tipo de trabalhos implica que o professor:

(a) estabeleça critérios gerais incluindo pontos como a compreensão que o aluno revela face ao problema concreto em estudo, a correcção dos aspectos matemáticos que surgem no trabalho, a qualidade da argumentação, a originalidade e apresentação, etc.;

(b) considere igualmente critérios específicos que considerem o modo como cada aluno abordou a tarefa e que permitam fazer uma apreciação tanto quanto possível holística de cada trabalho.

Apresenta-se a seguir o relatório produzido por uma aluna bem como as duas versões do relatório de um seu colega a quem a professora pediu que melhorasse a versão inicial. Estes documentos podem ser usados como material para uma discussão sobre formas adequadas de avaliar relatórios e de dar informações relevantes aos próprios alunos.

### Relatório da aluna A (7º ano, 12 anos).

*Cada país tem um tipo de matrículas conforme a quantidade de população. O nosso sistema é 4 algarismos e 2 letras, (ex: GL-34-87) e são possíveis 6.760.000 combinações. Este método já não serviria para a Itália (por exemplo), porque a sua população é mais numerosa.*

*Na Holanda que usava 4 algarismos e duas letras (ex: 13-TL-27), passou a utilizar um sistema com maior número de combinações: (ex:*

BD-27-CL) um conjunto de duas letras, 2 dígitos e duas letras, que dispõe de 45.697.600 matrículas.

*P.S. Para obter o nº de combinações possíveis multiplica-se o nº de hipóteses que temos disponíveis. Ex: se eu tiver 3 pares de sapatos e 2 pares de meias para saber quantas maneiras diferentes me posso calçar tenho de multiplicar 2 (pares de meias) x 3 (pares de sapatos) e assim obtenho 6 maneiras de calçar diferentes.*

*No caso das matrículas, trata-se de letras e dígitos, como já bem sabemos. Há 26 letras diferentes e dígitos apenas existem 10. Assim para obter o número de matrículas possíveis temos de multiplicar 26 por 10, conforme o número de letras e/ou números.*

*Ex:*

$$W \quad 1 \quad 5 \quad 8 \quad 4 \quad 1 \quad N$$
$$26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 = 67.600.000$$

*O jornalista Jorge Barreiros comenta num dos seus artigos que algumas pessoas pensam em mudar o tipo de matrícula que usamos. Este é de opinião contrária, pois acha que o nosso sistema é satisfatório, prático e legível. Eu apoio a sua opinião e acho que ele disse muito bem: "... não cremos que, neste país, mesmo ultrapassando o ano 2099, se atinja a saturação que nesta altura já apoquentá tanta gente".*

*Mas no caso de ser necessário mudar eu aconselharia um método que é utilizado na Bélgica, que também é prático, legível e não apresenta o risco de ter de mudar tão cedo.*

## **Relatório do aluno B (7º ano, 15 anos) — primeira versão.**

*Vimos que na Bélgica o sistema de matrículas era Bom devido ao seu número de população. Devido a sua população não ser grande o sistema de matrículas utilizado dava para a população e muito mais.*

*A sua população era de 9938 milhares e o número de matrículas que se podia fazer era de 17 milhões.*

*Em Portugal o seu sistema era bom havia poucos habitantes e muitas matrículas.*

*Claro na Holanda não sucedeu o mesmo.*

*O seu primeiro sistema era mau devido a haver mais habitantes cerca 13.650.000 para 6.760.000 de matrículas.*

*Por isso meteram 2 letras, dois números e duas letras assim o número de matrículas aumentava para 43.690.600.*

*Austria o sistema não era bom porque havia certas províncias que a sua população era grande. Províncias pequenas o sistema dava certo se a sua população fosse menor que 900 Mil habitantes. Tirol estava nessa situação tinha apenas 575.300 habitantes. Mas em Viena não dava porque a sua população era de 1.590.000. Tinha-se de fazer um sistema novo porque havia mais população do que matrículas. O sistema novo de uma letra, cinco algarismos e outra letra dava para 2.340.000 habitantes. Satisfazia todos.*



Portugal a sua população era 10373 mil habitantes e o seu sistema utilizado dava para 6.760.000. Tal como o (produtor) autor do texto das matrículas estava correcto e os seus argumentos também.

Acho que agora devia todo estar bem, de futuro devido ao aumento de população, se for preciso mudavase para duas letras, três números e três números.

#### Relatório do aluno B (7º ano, 15 anos) — segunda versão.

Em cada país tem-se um tipo de matrículas. Claro conforme o número de população. Em Portugal o seu sistema é de 4 algarismos e de 2 letras, e são possíveis 6.760.000 combinações. Estas combinações não foi um número pensado tive de fazer cálculos!

$$1 \text{ J} - 2 \text{ 4} - 7 \text{ 5} = 6.760.000 \text{ combinações}$$
$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

Na Itália já não acontece o mesmo por a sua população é mais numerosa. Portugal tem 10373 mil habitantes e a Itália tem 55810 mil habitantes.

A Holanda que o seu sistema de 4 algarismos e duas letras passou a utilizar um conjunto de duas letras, 2 dígitos e duas letras. Agora dispõe de muitas matrículas, de 45.697.600.

$$H \text{ J} - 1 \text{ 2} - 1 \text{ H} = 45 \text{ 697 600}$$
$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26$$

Para se obter o número de combinações possíveis faz-se:

Multiplica-se o número de letras ou números que podemos meter na primeira casa pela segunda ou outras tantas...

H	J
26 letras possíveis	26 letras possíveis
$26 \times 26 = 676$	
Mas se forem números é diferente.	
7	8
10 números possíveis	10 números possíveis
$10 \times 10 = 100$	

Se a matrícula for assim HJ.12.77 fazemos  
 $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6.760.000$  combinações.

O jornalista disse que algumas pessoas pensam mudar as matrículas. Ele acha que o nosso sistema é satisfatório e legível. Eu gosto da sua opinião. Neste país, quando ultrapassar o ano 2099 se atingir o maior número de população que vem logo apoquentar as pessoas. Nessa altura devia-se mudar as matrículas. Para 3 letras, 3 números, 2 letras. Não haveria mais problemas.