CAPÍTULO 1: PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÕES

1. PRODUTOS NOTÁVEIS E SUAS RESPECTIVAS FATORAÇÕES

Em uma multiplicação, o multiplicador e o multiplicando são chamados **fatores** e o resultado é chamado de **produto**, como pode ser visto nos exemplos abaixo:

$$\underbrace{7}_{\text{FAT}}\cdot\underbrace{5}_{\text{ORES}} = \underbrace{35}_{\text{PRODUTO}} \qquad\qquad \underbrace{a}_{\text{FAT}}\cdot\underbrace{b}_{\text{ORES}} = \underbrace{c}_{\text{PRODUTO}}$$

Existem algumas multiplicações muito comuns na matemática, pois colaboram para resoluções de muitos problemas que você terá contato daqui em diante nos seus estudos. Por esse motivo é importante termos um conhecimento mais profundo nessas multiplicações específicas. Iremos estudar seus fatores, seus respectivos produtos (conhecidos como **produtos notáveis**) e também os processos de desenvolvimento dos fatores em produto, assim como o processo contrário, de transformação de um produto em seus fatores (conhecido como **fatoração**).

EXERCÍCIOS

E1.1 - Dadas as multiplicações a seguir determine quais são os fatores e quais são os produtos das mesmas.

a) $15 \cdot 9 = 135$ **b)** $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ **c)** $3 \cdot a \cdot 5 = 15a$

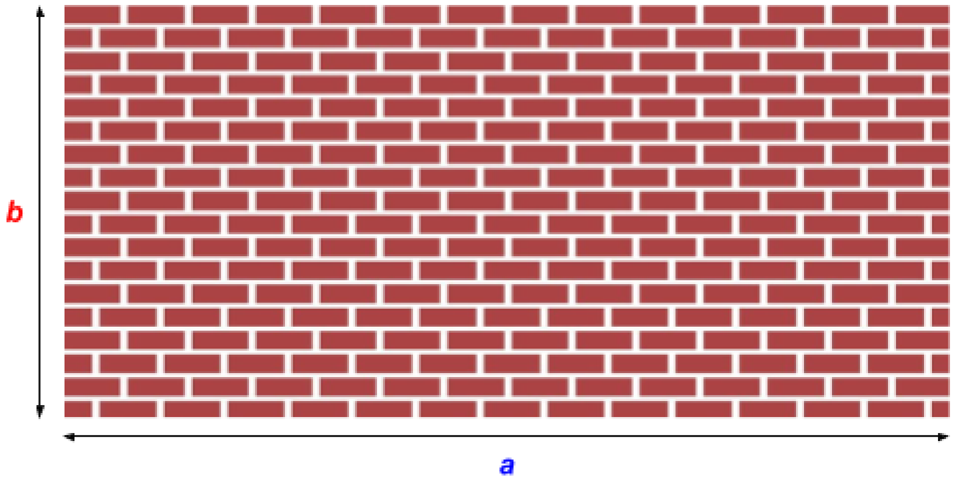
d) $(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 - 1$ **e)** $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

1.1. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA E O FATOR COMUM EM EVIDÊNCIA

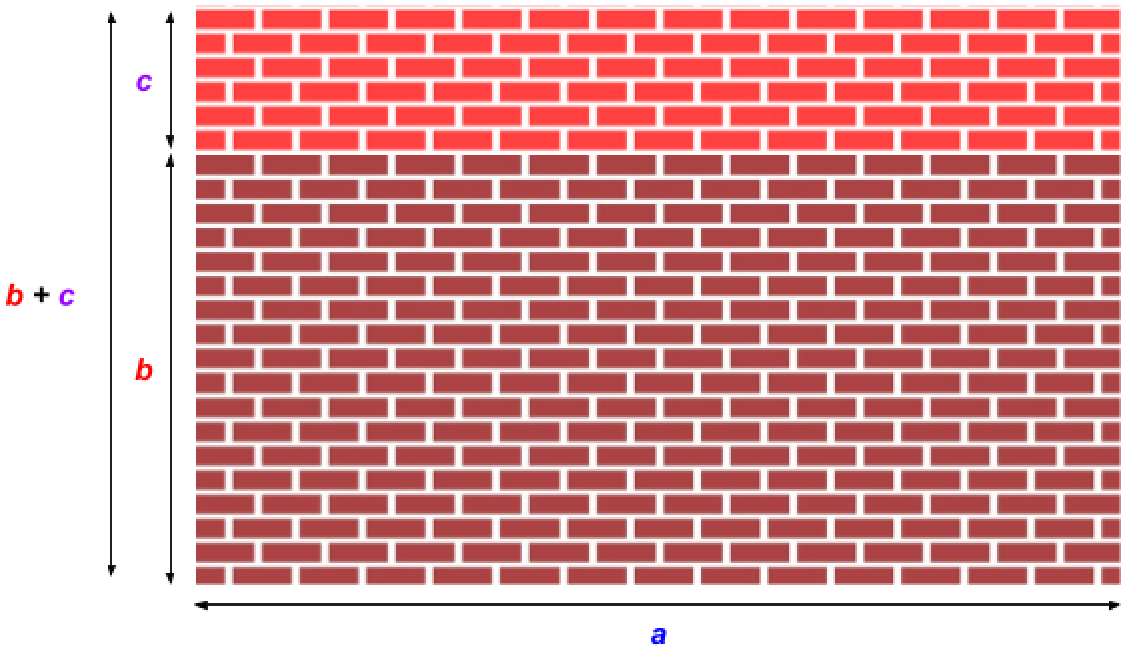
Em uma determinada escola, havia um muro antigo que que estava precisando passar por uma reforma. A comunidade escolar, além de exigir uma decoração artística e reparos estruturais diversos, solicitava que o muro fosse mais alto.

Depois de coletar todas as opiniões em reuniões, o diretor da escola, Edson, começou a viabilizar a reestruturação do muro da escola. Para isso, ele contratou os serviços de uma empresa responsável por conceber o projeto do muro e depois executar a obra. As primeiras indicações solicitadas foram a largura e a altura do muro antigo, além do seu formato.

Na ocasião, o diretor da escola informou que o muro antigo possuía forma retangular, com largura ***a*** e altura ***b***, como pode ser visto na figura abaixo, que é uma representação da vista frontal do muro:



Depois de acertar, os detalhes a respeito das reformas estruturais, o diretor Edson falou a respeito do aumento da altura do muro. Ele especificou que desejava realizar um acréscimo na altura do muro que valesse ***c***, isto é, a altura do novo muro deveria ter medida (***b*** **+** ***c***) , correspondente à altura antiga somada com o quanto precisava se construir a mais. Veja como ficaria o novo muro pela representação abaixo, entregue pela construtora (as cores são meramente ilustrativas):



Com esses dados, a empresa pode finalizar o projeto, e entregou ao diretor Edson um esquema com as mesmas especificações da imagem acima. Daí, restava à empresa executar de fato a reforma do muro. Depois de concluída, o diretor Edson foi buscar um artista para decorar o muro com grafites.

O grafiteiro informou a Edson que calculava o preço dos seus serviços pela área que seu trabalho iria cobrir. Com isso, o diretor precisava informar qual era a área total do novo muro, que pretendia decorar com os desenhos. Edson observou que havia duas formas de calcular a área que precisava informar ao artista.

O primeiro método seria calcular, separadamente, as áreas do muro antigo (parte mais escura na figura anterior) e da parte que foi construída após a reforma (parte mais clara na mesma figura), e depois somá-las, para chegar à área total do muro. Vamos ver como Edson calculou cada uma das áreas em seu caderno:

ÁREA DO MURO ANTIGO: $a \cdot b$

ÁREA DA PARTE NOVA: $a \cdot c$

Somando as duas áreas, temos:

$(a \cdot b) + (a \cdot c)$

Observe que ambas as áreas foram calculadas dessa maneira pois o as partes consideradas eram retangulares, e por isso bastou multiplicar a medida de seus lados para obter suas áreas. Assim, por meio desse raciocínio, o diretor Edson concluiu que podia usar a expressão $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ para calcular a área total do muro após a obra.

O segundo modo de calcular essa área que Edson percebeu foi calculá-la toda de uma vez, isto é, considerar o muro já depois da reforma, medir sua largura e sua altura, e multiplicá-las, pois o formato permaneceu retangular após o aumento da altura do muro. Para isso, observou no esquema que a empresa entregou que a largura do muro continuava sendo a, e que altura era $(b + c)$, como ele e a comunidade haviam solicitado.

Dessa forma, obteve a expressão ***a*** · (***b*** **+** ***c***) ao multiplicar as medidas dos lados do retângulo.

Veja que Edson encontrou duas expressões algébricas que podem ser usadas para calcular a mesma área. Dessa maneira, podemos concluir que:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Com as expressões em mãos, o diretor Edson, pode escolher aquela que preferia para calcular a área total do muro depois da reforma, para entregar o grafiteiro, que faria os desenhos, deixando o muro como ele foi pensado pelas pessoas da comunidade escolar.

Organizando as ideias

A primeira multiplicação notável, mostrada pela igualdade encontrada na história que vimos acima, é a do tipo:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Muitas vezes nos deparamos com uma multiplicação do tipo ***a*** · ***(b + c)*** e precisamos desenvolvê-la para continuarmos a resolver um dado problema de matemática. Esse desenvolvimento se dá conforme a propriedade distributiva, que já estudamos anteriormente, mas vamos relembrá-la a seguir.

$$a \cdot (b + c) = \underline{a \cdot b} + \underline{a \cdot c}$$

Também é comum nos depararmos, quando estamos resolvendo algum problema, com a soma ***ab*** **+** ***ac***. Em alguns casos, é importante perceber que ambos os termos ***ab*** e ***ac*** possuem um fator comum ***a***, que pode ser colocado em evidência, como é mostrado a seguir.

$$\underbrace{a}_{\text{FATOR COMUM}} \cdot b + \underbrace{a}_{\text{FATOR COMUM}} \cdot c = \underbrace{a}_{\text{FATOR COMUM EM EVIDÊNCIA}} \cdot (b + c)$$

Esse processo é uma fatoração, pois é uma transformação de um produto em fatores. Note também que a fatoração para esse caso é o processo contrário a aplicação relembrada da propriedade distributiva.

Agora vamos praticar um pouco a propriedade distributiva e a fatoração que correspondente ao procedimento contrário.

EXERCÍCIOS

E1.2 - Dadas as multiplicações a seguir determine quais são seus respectivos produtos através da propriedade distributiva.

a) $3 \cdot (9 + 2) =$ **b)** $x \cdot (2 - 5) =$ **c)** $3 \cdot (x + 2) =$

d) $7 \cdot (x - y) =$ **e)** $x \cdot (a - 3) =$ **f)** $a \cdot (x + y) =$

E1.3 - Dadas as somas a seguir, identifique os fatores comuns a todas as parcelas e coloque esse fator em evidência, ou seja, faça a fatoração.

a) $12 + 8 =$ **b)** $3x - 8x =$ **c)** $5x - 10 =$

d) $15x + 15a =$ **e)** $15x - 9 =$ **f)** $bx + cx =$

Há ainda uma técnica de fatoração que é um caso específico da apresentada anteriormente: a fatoração por agrupamento. Essa maneira de transformar um produto em fatores, pode ser utilizada quando há uma soma com mais de duas parcelas e você consegue agrupá-las por fatores comuns que, após serem colocados em evidência, é possível notar que ainda há fatores comuns aos grupos. A fatoração por agrupamento mais comum encontra-se esquematizada a seguir.

$$\underbrace{a \cdot x + a \cdot y}_{\text{GRUPO 1}} + \underbrace{b \cdot x + b \cdot y}_{\text{GRUPO 2}} = \underbrace{a \cdot (x + y)}_{\text{GRUPO 1 FATORADO}} + \underbrace{b \cdot (x + y)}_{\text{GRUPO 2 FATORADO}}$$

$$a \cdot \underbrace{(x+y)} + b \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{FATOR COMUM}} = \underbrace{(x+y)}_{\text{FATOR COMUM EM EVIDÊNCIA}} \cdot (a+b)$$

Agora vamos praticar um pouco da fatoração por agrupamento.

EXERCÍCIOS

E1.4 - Dadas as somas a seguir, identifique os fatores comuns por grupos e coloque esses fatores em evidência, encontre então os fatores comuns aos grupos e finalize a fatoração por agrupamento.

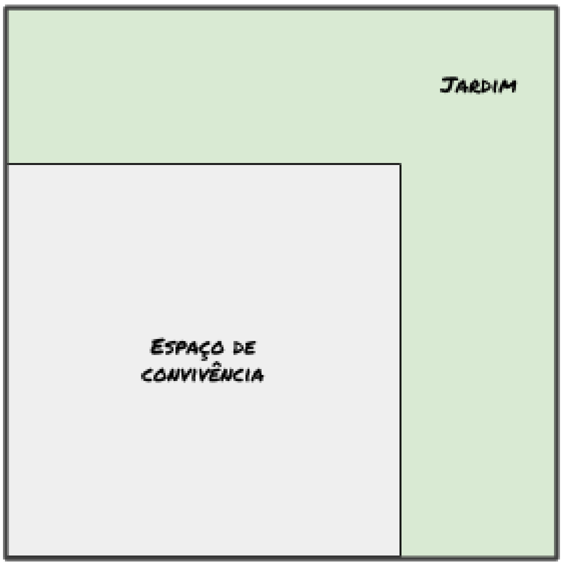
a) $5a + 5b + 9a + 9b =$ **b)** $5x + 5y - ax - ay =$

c) $x^3 + 3x^2 + x + 3 =$ **d)** $m^2 - 2m + mn - 2n =$

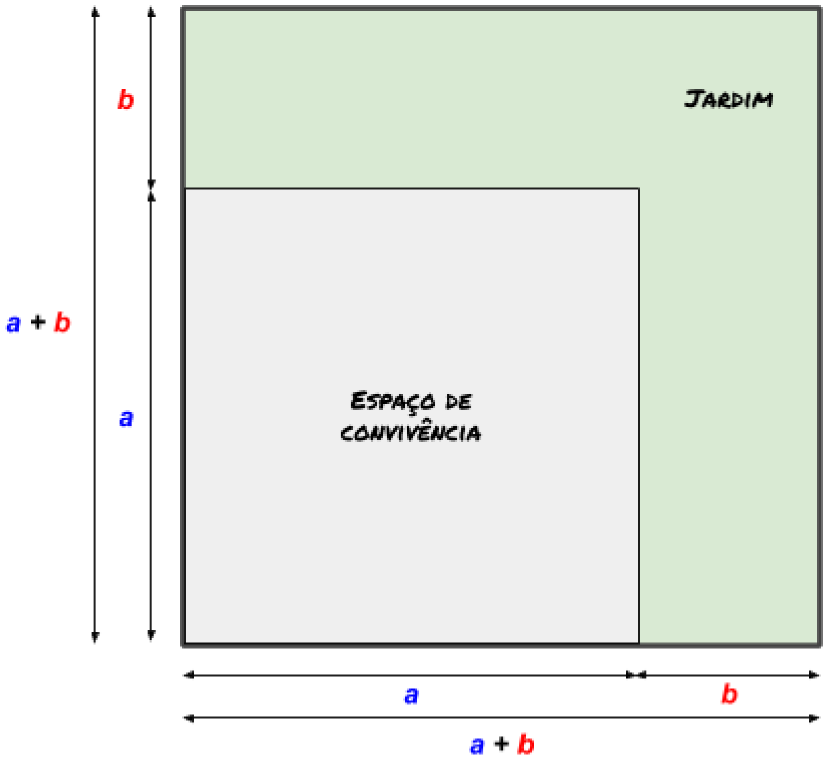
1.2. QUADRADO DA SOMA E SEU TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

O sr. Moisés adquiriu recentemente uma casa para morar com a família. No imóvel, além dos ambientes internos (sala, cozinha, quartos, etc) há também um quintal grande que não era utilizado pelos antigos proprietários, mas que Moisés pretende aproveitar. A ideia dele é construir um espaço de convivência e um jardim em uma parte do quintal.

Ao organizar suas ideias, Moisés decidiu cercar uma parte quadrada do quintal para seu projeto. Nesse pedaço, ele optou por fazer o espaço de convivência também quadrado, encostado em dois lados “vizinhos” do quadrado demarcado, e o jardim no espaço restante desse cercado. Abaixo está uma planta que o sr. Moisés esboçou:

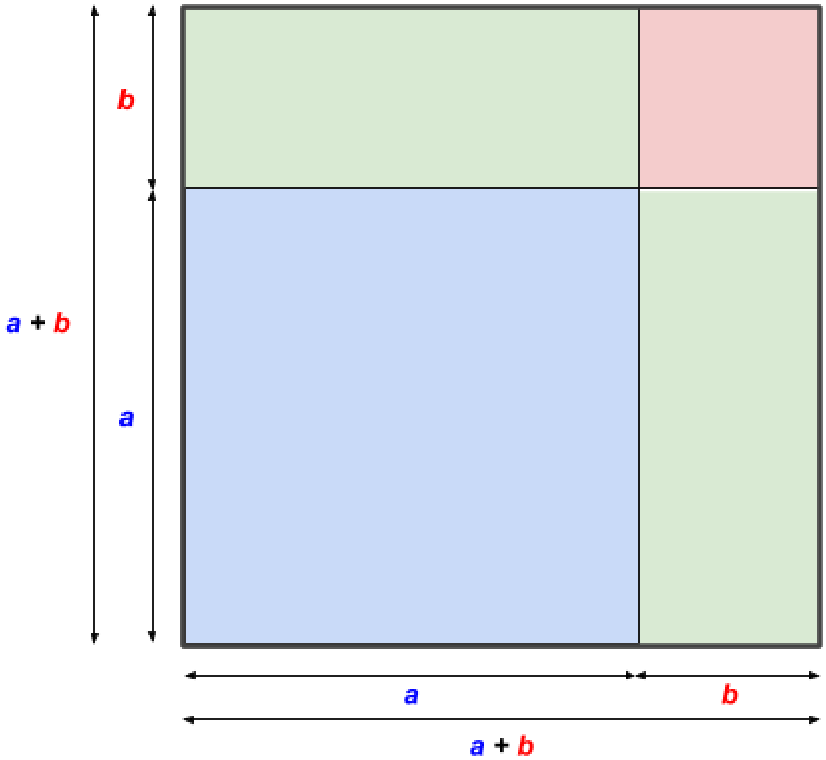


Em seu projeto, o sr. Moisés deseja que o lado do quadrado que representa o Espaço de Convivência tenha uma determinada medida, que chamaremos aqui de ***a***. A parte que falta para completar o lado do cercado terá uma outra medida, que chamaremos aqui de ***b***. Desse modo, podemos observar que o cercado possui, portanto lados de medida (***a*** + ***b***). Observe a figura abaixo que esquematiza nossas definições:



Desse modo, o sr. Moisés se perguntou: Qual será a área que ele deverá reservar de seu quintal para realizar seu projeto?

Para resolver esse problema e responder a pergunta do sr. Moisés, devemos recorrer ao **quadrado da soma de dois termos**. Inicialmente, vamos observar que a área que desejamos calcular para ajudar sr. Moisés é $(a + b) \cdot (a + b)$, ou seja, $(a + b)^2$, pois o terreno cercado é um quadrado. Para realizar essa operação e descobrir qual será o resultado, vamos dividir melhor o terreno e recolorir algumas partes da planta do sr. Moisés. Observe a figura abaixo:



Na nova divisão, repare que não nos interessa mais saber qual parte será o Jardim e qual será o Espaço de Convivência, pois estamos interessados na área total do cercado. Desse modo, vamos agora calcular a área de cada parte da figura em separado:

- **Quadrilátero azul** : $a \cdot a = a^2$, pois se trata de um quadrado de lado a;
- **Quadriláteros verdes** : $a \cdot b = ab$, pois são retângulos de lados a e b. Como são dois retângulos, devemos contar essa área duas vezes. Assim, a área da parte verde é $2ab$;
- **Quadrilátero vermelho** : $b \cdot b = b^2$, pois se trata de um quadrado de lado b .

Agora que calculamos as áreas de cada parte do cercado separadamente, basta somá-las e descobrir qual a área total que o sr. Moisés precisará reservar para deixar o quintal do jeito que deseja. Somando tudo, temos $a^2 + 2ab + b^2$.

Mas, você se lembra que, como o cercado é um quadrado de lado $a + b$, sua área também podia ser representada pela expressão $(a + b)^2$? Dessa maneira, achamos duas expressões algébricas que representam uma mesma área e, portanto, são iguais. Podemos, então escrever:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Com isso, sr. Moisés podia agora calcular a área do quintal que precisaria reservar para a construção do seu cercado.

Organizando as ideias

A igualdade alcançada na história do sr. Moisés é resultado do quadrado de uma soma, que corresponde à multiplicação de uma soma por ela mesma. Dentro do estudo que estamos fazendo neste capítulo é interessante identificarmos o que são as parcelas, o produto, o processo de desenvolvimento e a fatoração.

Inicialmente vamos escrever a igualdade encontrada de outra forma, para identificarmos os fatores e o produto.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\underbrace{(a+b) \cdot (a+b)}_{\text{FATORES}} = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{PRODUTO NOTÁVEL}}$$

Quando transformamos o quadrado da soma $(a + b)^2$ em $(a + b) \cdot (a + b)$ é mais fácil perceber quem são os fatores e qual é o produto na igualdade encontrada. Ao desenvolvermos a multiplicação temos como resultado o produto $a^2 + 2ab + b^2$, que é bastante famoso e utilizado na matemática e, por isso, o chamamos de um produto notável.

Ao fazermos o procedimento contrário, que corresponde à transformação de $a^2 + 2ab + b^2$ em $(a + b)^2$ estamos fatorando o produto notável apresentado. Note que $a^2 + 2ab + b^2$ é um trinômio que podemos fatorar em ***(a + b)²***, que é um quadrado perfeito, por isso chamamos ***a² + 2ab + b²*** de **trinômio quadrado perfeito**.

Agora vamos praticar um pouco o desenvolvimento de quadrados de somas para encontrar seus respectivos produtos notáveis e, posteriormente, fazer o caminho contrário, a fatoração do trinômio quadrado perfeito.

EXERCÍCIOS

E1.5 - Dados os quadrados de somas a seguir determine quais são seus respectivos produtos notáveis através da igualdade encontrada na história do sr. Moisés.

a) $(9 + 2)^2 =$ **b)** $(x + 1)^2 =$ **c)** $(x + 3)^2 =$

d) $(2x + 5)^2 =$ **e)** $(m + n)^2 =$ **f)** $(2x + 3y)^2 =$

E1.6 - Dados os trinômios a seguir, fatore-os em respectivos quadrados perfeitos de somas.

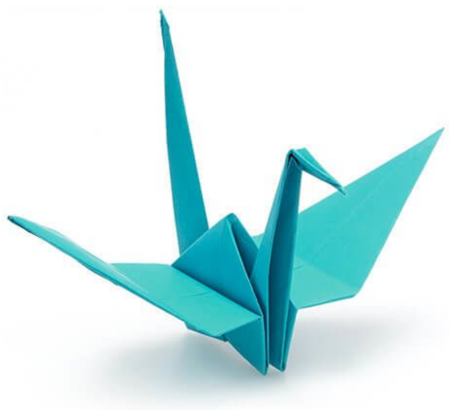
a) $x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 =$ **b)** $x^2 + 2x + 1 =$

c) $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 =$ **d)** $x^2 + 6x + 9 =$

e) $m^2 + 2 \cdot m \cdot 2n + (2n)^2 =$ **f)** $m^2 + 4mn + 4n^2 =$

g) $(3m)^2 + 2 \cdot 3m \cdot 2n + (2n)^2 =$ **h)** $9m^2 + 12mn + 4n^2 =$

1.3. QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

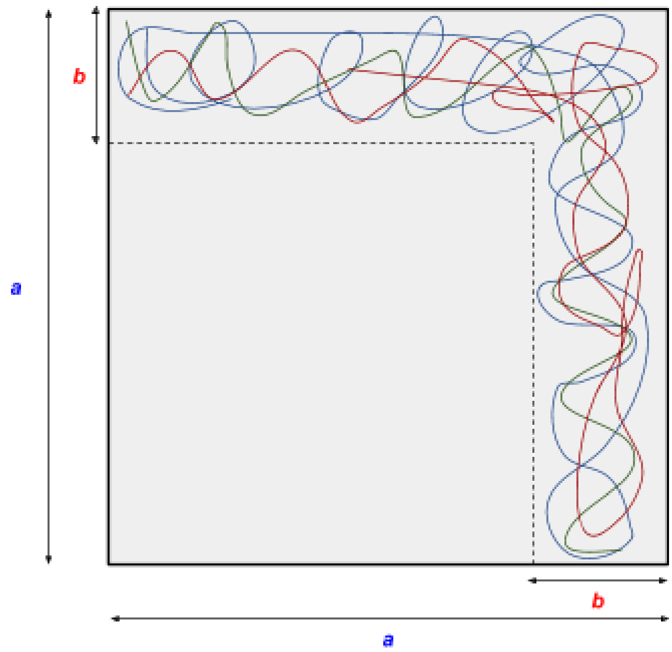


Helena é uma artista, e começou a se interessar pelo *origami*, uma forma de arte de origem japonesa que consiste, resumidamente, em fazer representações de criaturas e objetos por meio da dobradura de papel. Pesquisando sobre o assunto, ela descobriu que para começar a fazer as dobraduras, a maioria começa a partir de uma folha quadrada de papel.

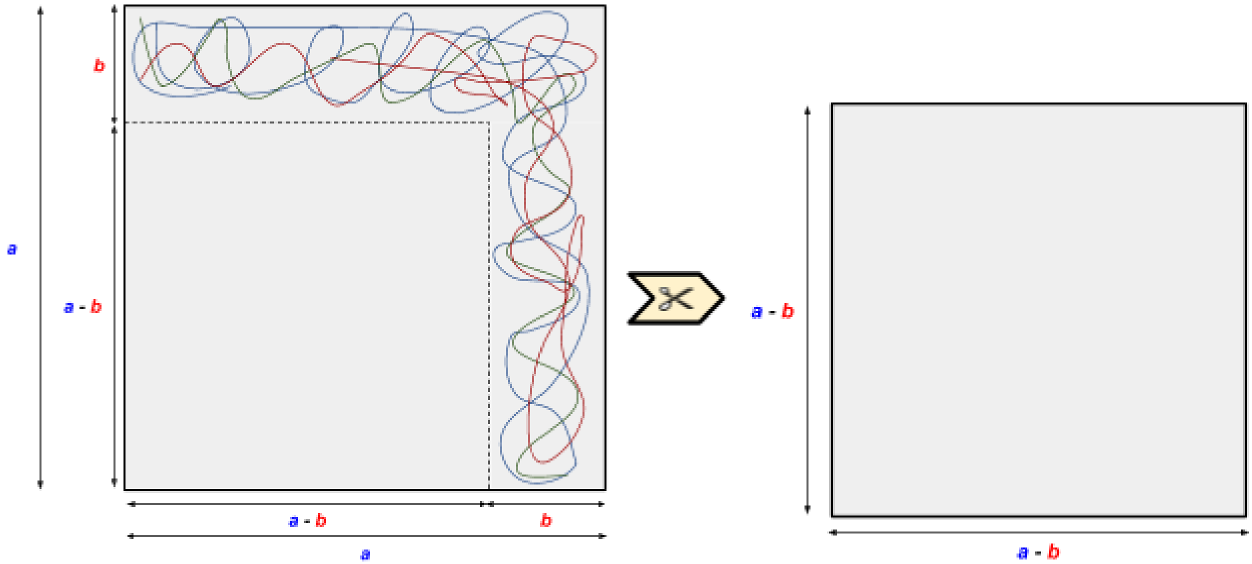
Entusiasmada, foi procurar em casa alguma folha de papel para começar a praticar. Encontrou, em alguns retalhos de papel que costuma guardar, uma folha que julgou apropriada, pois parecia quadrada. No entanto, observou que ela estava um pouco riscada em algumas bordas, e por isso, precisava retirá-las. Veja como estava a folha que Helena encontrou:

Antes de cortar as bordas, a artista verificou que a folha tinha, de fato um formato de quadrado, e seus lados tinham uma medida que chamaremos de ***a***.

Ao pensar em como iria retirar as bordas rabiscadas, Helena se lembrou que, para fazer o seu *origami*, a folha precisava continuar quadrada após o recorte. Então, decidiu retirar das bordas faixas **de uma mesma largura**, pois assim garantiria que a folha ia continuar quadrada depois do recorte. As faixas que ela marcou, possuíam uma largura ***b***. Observe abaixo como ficou a folha depois das marcações de Helena:



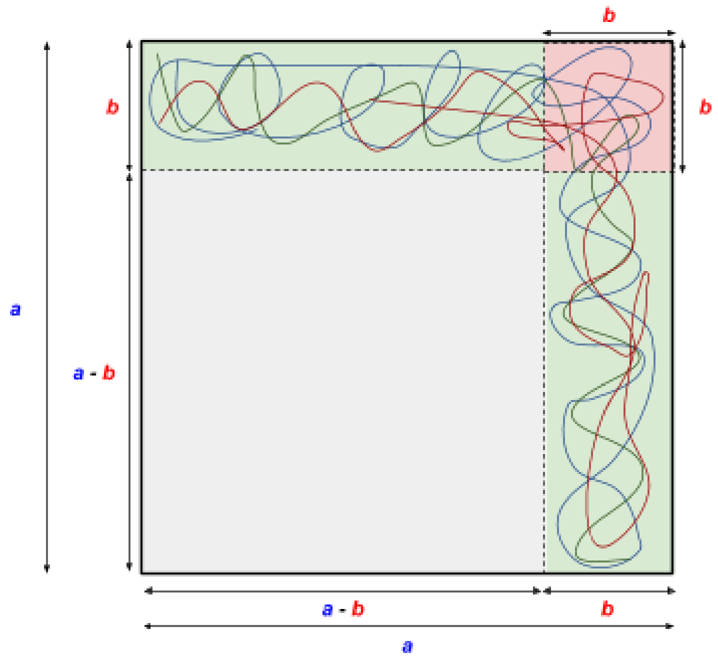
Depois de descartar as partes riscadas, Helena ficou com uma folha quadrada, que tinha lados de medida (***a*** **-** ***b***), como na figura abaixo:



Terminado todo esse processo, Helena já podia começar a fazer seus *origamis*. No entanto, antes de dobrar a folha, ela se perguntou **qual é a área** da folha que lhe restou, pois desejava decorá-la de algum modo.

Para calcular a área, ela lembrou que o pedaço de papel era um quadrado, cujos lados mediam (***a*** **-** ***b***). Dessa forma, a área que se pretendia saber deveria ser calculada elevando ao quadrado a medida do lado da folha, ou seja, a área será (***a*** **-** ***b***)². Ainda assim, Helena procurava saber se existe algum outro jeito de calcular esta área, pois queria escolher qual mais a agradava.

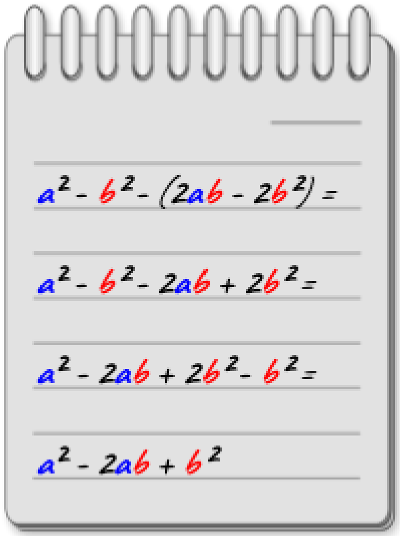
Assim, ela pegou de volta as partes de papel que estavam rabiscadas e que ela havia descartado, colocou ao lado da folha que usaria para seu trabalho, e fez mais algumas marcações para tentar entender melhor o problema. Veja abaixo como ela esquematizou tudo:



Agora, ao “remontar” a situação original, ela decidiu pensar de outro modo. Primeiro ela observou que a área total da folha antes dos cortes era a^2, pois era um quadrado de lado a. Depois, ela decidiu calcular as áreas da parte rabiscadas, separando-a em três quadriláteros, como na figura acima. Veja os resultados desses cálculos:

- **Quadrilátero vermelho** : $b \cdot b = b^2$, pois se trata de um quadrado de lado b;
- **Quadriláteros verdes** : $(a - b) \cdot b = ab - b^2$, pois são retângulos de lados $(a - b)$ e b. Como são dois retângulos, devemos contar essa área duas vezes. Assim, a área da parte verde é $2 \cdot (ab - b^2) = 2ab - 2b^2$.

Com essas áreas em mãos, para saber a área desejada, Helena deveria subtraí-las da área total, isto é, deveria realizar a seguinte operação: $a^2 - b^2 - (2ab - 2b^2)$. Observe abaixo como a artista resolveu em seu bloco de notas e o resultado ao qual ela chegou:



Desse modo, Helena viu que existe outro modo de calcular a área que ela desejava além da que tinha pensado anteriormente, e concluiu, portanto, que elas são equivalentes. Assim, podemos escrever que:

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Sabendo disso, Helena agora poderia descobrir a área da folha que usaria para fazer seu primeiro *origami* e assim poder decorá-lo como preferir.

Organizando as ideias

Inicialmente vamos escrever a igualdade encontrada de outra forma, para identificarmos os fatores e o produto.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\underbrace{(a - b)}\cdot\underbrace{(a - b)}_{\text{FATORES}} = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{PRODUTO NOTÁVEL}}$$

Quando transformamos o quadrado da diferença ***(a - b)²*** em ***(a - b)*** · ***(a - b)*** é mais fácil perceber quem são os fatores e qual é o produto na igualdade encontrada na história de Helena. Ao desenvolvermos a multiplicação temos como resultado o produto ***a² - 2ab + b²***, que é bastante famoso e utilizado na matemática e, por isso, também o chamamos de um produto notável, assim como já havíamos chamado $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$.

Ao fazermos o procedimento contrário, que corresponde à transformação de $\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}$ em $\boldsymbol{(a - b)^2}$ estamos fatorando o produto notável apresentado. Note que $\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}$ é um trinômio que podemos fatorar em $\boldsymbol{(a - b)^2}$, que é um quadrado perfeito, por isso também chamamos $\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}$ de um **trinômio quadrado perfeito**.

Agora vamos praticar um pouco o desenvolvimento de quadrados de diferenças para encontrar seus respectivos produtos notáveis e, posteriormente, fazer o caminho contrário, a fatoração do trinômio quadrado perfeito.

EXERCÍCIOS

E1.7 - Dados os quadrados de somas a seguir determine quais são seus respectivos produtos notáveis através da igualdade encontrada na história da Helena.

a) $(7 - 1)^2 =$ **b)** $(x - 1)^2 =$ **c)** $(x - 4)^2 =$

d) $(2x - 3)^2 =$ **e)** $(p - q)^2 =$ **f)** $(2m - 3n)^2 =$

E1.8 - Dados os trinômios a seguir, fatore-os em respectivos quadrados perfeitos de diferenças.

a) $x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 =$ **b)** $x^2 - 2x + 1 =$

c) $x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 =$ **d)** $x^2 - 4x + 4 =$

e) $m^2 - 2m \cdot 3n + (3n)^2 =$ **f)** $m^2 - 6mn + 9n^2 =$

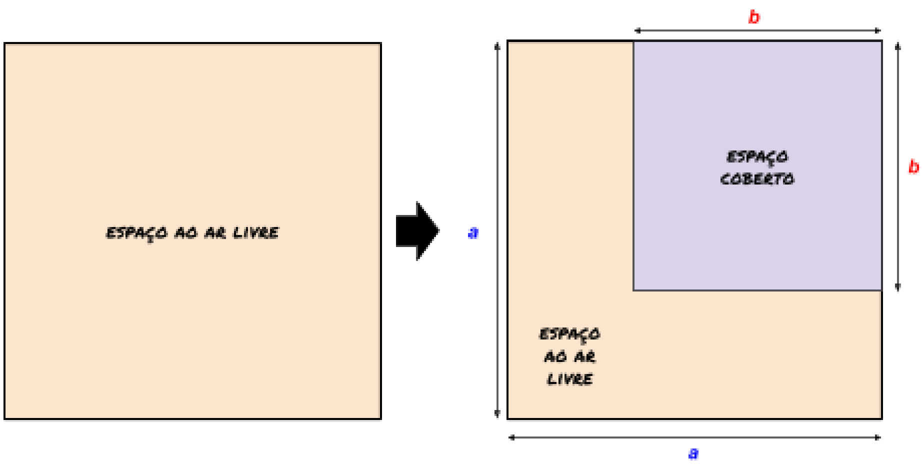
g) $(3m)^2 - 2 \cdot 3m \cdot 2n + (2n)^2 =$ **h)** $9m^2 - 12mn + 4n^2 =$

1.4. PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS E DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

No restaurante Água na Boca, há um espaço ao ar livre onde há mesas e cadeiras, usadas pelos clientes, para que possam se acomodar e fazer suas refeições. O ambiente era muito confortável, e os clientes gostavam bastante, porém eles sempre ficavam sem poder ir ao restaurante quando chovia, pois não havia outro local onde pudessem sentar-se e fazer suas refeições.

Com esse problema no radar, a dona do estabelecimento, Fernanda teve que pensar em soluções para não perder mais os clientes em dias chuvosos. Ela cogitou cobrir todo o recinto, mas como os clientes sempre gostaram muito do espaço aberto, não lhe parecia uma boa alternativa. Foi então que, conversando com seus funcionários, um deles sugeriu que fosse coberta apenas uma parte do ambiente, de preferência em uma região próxima à porta que leva à parte interna, onde há a cozinha, o balcão e afins. Fernanda achou uma boa ideia e, com a ajuda de um arquiteto, começou a planejar a reforma.

Como o espaço para refeições era quadrado, Fernanda pensou em fazer um ambiente coberto também quadrado, e próximo à porta, como foi sugerido. Levando essas indicações em consideração, o arquiteto entregou à dona do restaurante Água na Boca a representação abaixo, já com as medidas:

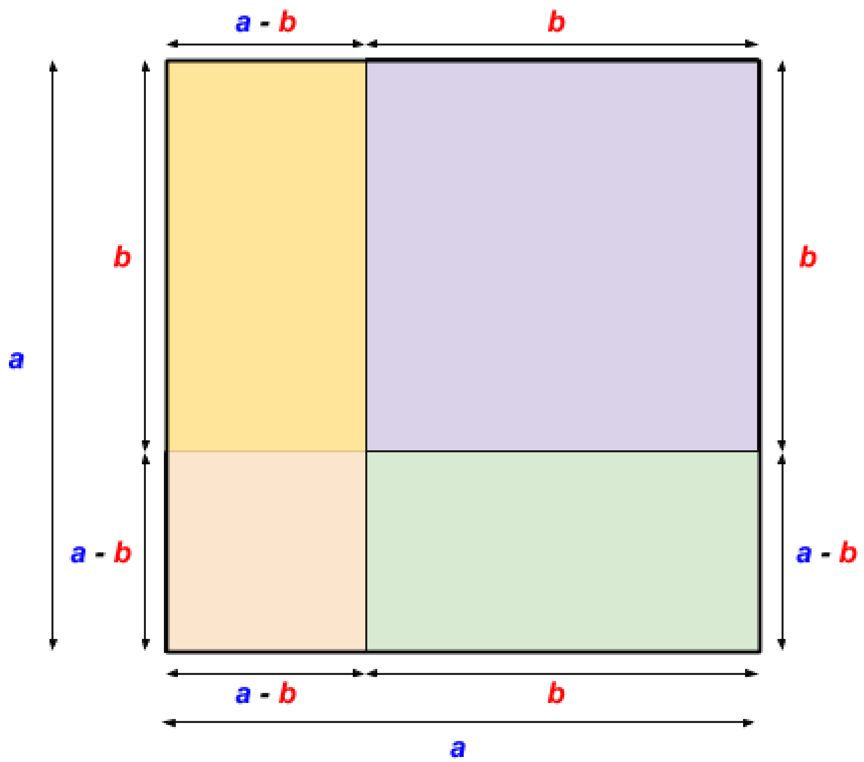


Com a planta em mãos, Fernanda se perguntou qual serão as áreas dos dois novos ambientes que os clientes terão à disposição, já pensando em comprar materiais para a obra, como pisos e revestimentos.

Na disposição antiga, Fernanda já sabia que a área valia a^2, pois o espaço era um quadrado de lado a, como evidenciaram as medições do arquiteto. Da mesma maneira, ela sabia que a parte do espaço coberto ficaria com uma área b^2, pois também foi planejado para ser quadrado, dessa vez com medida b. No entanto, a área do espaço que permaneceria ao ar livre depois da reforma não era tão simples de se calcular, já que não era nenhuma forma geométrica conhecida por ela.

A primeira ideia de Fernanda para resolver seu problema foi, a partir das áreas que ela conseguiu calcular, descobrir a área da região desejada. Assim, ela pegou a área total do espaço ao ar livre (antes da reforma) e retirou a área do espaço coberto que seria construído, pois a região que restaria seria exatamente a que a interessava. A forma como a dona da restaurante pensou pode ser representada pela expressão algébrica $a^2 - b^2$, pois ela retirou da área total (a^2) a área da parte coberta (b^2).

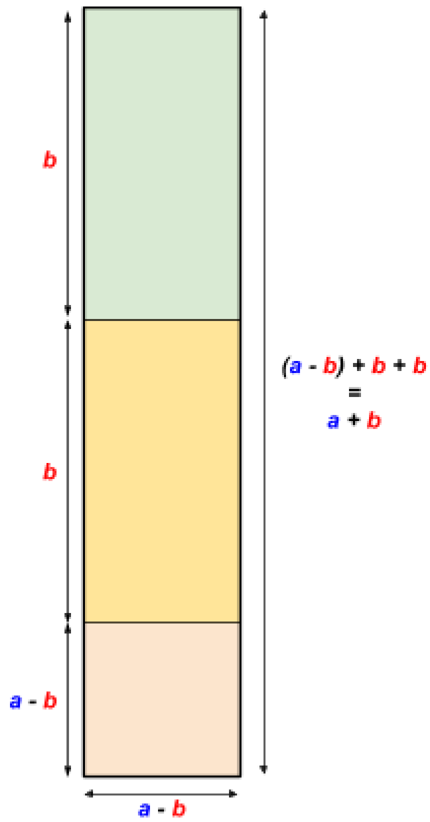
Mesmo assim, Fernanda não ficou satisfeita, e queria achar uma maneira de calcular a área do novo espaço ao ar livre sem precisar saber anteriormente as outras áreas. Foi então que ela decidiu pegar a planta que o arquiteto havia entregado e fazer algumas alterações e marcações extras. Veja o que ela fez:



Ainda sem saber muito o que fazer, Fernanda teve a ideia de fazer alguns recortes no seu esquema, a fim de descartar toda a área que não a interessava, e depois reorganizar o restante de algum modo que pudesse pensar de forma mais clara. Veja na próxima figura o resultado que ela obteve:

Organizando as peças dessa maneira, Fernanda formou um retângulo, cuja área é a mesma da que ela procura, pois as peças foram apenas rearranjadas, mas são as mesmas.

Para calcular a área do retângulo que ela formou, bastava multiplicar as medidas de seus lados, que são (**a** + **b**) e (**a** - **b**). Assim, ela chegou em uma outra maneira de calcular a área do novo espaço ao ar livre, desta vez, sem precisar calcular nenhuma outra área previamente. A expressão algébrica que representa esse cálculo é (**a** + **b**) · (**a** - **b**)



Portanto, graças aos cálculos e raciocínios de Fernanda, conseguimos chegar a duas expressões algébricas que representam uma mesma área, e por isso, podemos escrever:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

Organizando as ideias

Inicialmente vamos escrever a igualdade encontrada pelos cálculos de Fernanda de outra forma, para identificarmos os fatores e o produto.

$$\underbrace{(a+b)\cdot(a-b)}_{\text{FATORES}} = \underbrace{a^2 - b^2}_{\text{PRODUTO NOTÁVEL}}$$

Nota-se que os fatores são ***(a + b)*** *e* ***(a - b)*** e o produto é ***a² - b²***, que é famoso e bastante utilizado na matemática e, por isso, também o chamamos de um produto notável, assim como já havíamos chamado $a^2 + 2ab + b^2$ e $a^2 - 2ab + b^2$.

Ao fazermos o procedimento contrário, que corresponde à transformação de $a^2 - b^2$ em $(a + b) \cdot (a - b)$ estamos fatorando o produto notável apresentado.

Agora vamos praticar um pouco o desenvolvimento do produto da soma pela diferença para encontrar seus respectivos produtos notáveis e, posteriormente, fazer o caminho contrário, a fatoração.

EXERCÍCIOS

E1.9 - Dados os quadrados de somas a seguir determine quais são seus respectivos produtos notáveis através da igualdade encontrada na história da Fernanda.

a) $(4 + 2) \cdot (4 - 2) =$ **b)** $(x - 1) \cdot (x + 1) =$

c) $(x - 3) \cdot (x - 3) =$ **d)** $(3x + 2) \cdot (3x - 2) =$

e) $(p - q) \cdot (p + q) =$ **f)** $(5m + 3n) \cdot (5m - 3n) =$

E1.10 - Dados os binômios a seguir, fatore-os em respectivos produtos de somas pela diferença.

a) $3^2 - 2^2 =$ **b)** $x^2 - 1^2 =$ **c)** $x^2 - 1 =$

d) $k^2 - 2^2$ **e)** $k^2 - 4 =$ **f)** $m^2 - (3n)^2 =$

g) $m^2 - 9n^2 =$ **h)** $(2n)^2 - (3p)^2 =$ **i)** $4k^2 - 9q^2 =$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

EC1.1 - Determine a área de um quadrado de lado:

a) $2 + \sqrt{3}$ **b)** $3 - \sqrt{3}$ **c)** $5 + \sqrt{5}$ **d)** $\sqrt{7} - \sqrt{3}$

EC1.2 - Determine a área de um retângulo de base ***b*** e altura ***h*** onde:

a) $b = x + 3$ e $h = x - 3$ **b)** $b = 2 + \sqrt{3}$ e $h = 2 - \sqrt{3}$

EC1.3 - Determine a área de um triângulo de base ***b*** e altura ***h*** onde:

a) $b = 7 + \sqrt{5}$ e $h = 7 - \sqrt{5}$ **b)** $b = 4 + 2\sqrt{3}$ e $h = 4 - 2\sqrt{3}$

EC1.4 - Sabendo que a diferença entre as medidas do maior cateto de um triângulo retângulo e a hipotenusa é igual a 2 e que o menor cateto mede 6, determine quanto mede o maior cateto e a hipotenusa desse triângulo.

EC1.5 - Calcule as expressões:

a) $\sqrt{(\sqrt{15}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}$ **b)** $\sqrt{(\sqrt{5}+1)\cdot(\sqrt{5}-1)}$

EC1.6 - Determine o lado de um quadrado cuja área é:

a) $16 + 8k + k^2$ **b)** $25 - 20k + 4k^2$

Agora discuta quais os possíveis valores de k nos itens “a” e “b”, respectivamente.

EC1.7 - Sabendo que um triângulo retângulo possui área $12{,}5 + 10k + 2k^2$ e que seus catetos possuem a mesma medida, determine quanto vale cada cateto desse triângulo.

EC1.8 - Simplifique as expressões a seguir:

a) $\frac{x^2+2x+1}{x+1}$ **b)** $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ **c)** $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

c) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ **d)** $\frac{4x^2+20x+25}{4x^2-25}$ **e)** $\frac{25x^2-30x+9}{25x^2-9}$

CAPÍTULO 2: EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU

2. EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU

No período Babilônio antigo há registros que os babilônios resolviam equações do 2° grau completas, pois já era conhecido algumas fórmulas de fatoração. Alguns séculos depois, os gregos desenvolveram uma visão geométrica da equação do 2 grau dentro da álgebra.

2.1. APRESENTANDO A NOTAÇÃO E A TERMINOLOGIA

Lembrando que equação é uma igualdade entre duas expressões (denominadas membros), em que usamos uma ou mais letras (chamadas de incógnitas) para representar números e quantidades desconhecidas. Nosso objeto de estudo agora é a equação do 2º grau ou também conhecida como equação quadrática. Veja a estrutura:

incógnita

$$\underbrace{a}\overbrace{x}^2 + \underbrace{b}\overbrace{x} + \underbrace{c} = 0$$

coeficientes

Neste exemplo, o ***x*** é a incógnita e representa um valor desconhecido. Já as letras ***a***, ***b*** e ***c*** são chamadas de coeficientes da equação. Os coeficientes ***a***, ***b*** e ***c*** são números reais e note que o coeficiente ***a*** tem que ser diferente de zero, caso contrário, passa a ser uma equação do 1º grau. Note que uma equação quadrática possui uma incógnita elevada ao quadrado.

Resolver uma equação significa buscar valores reais de x, que tornam a equação verdadeira. Esses valores são denominados raízes da equação.

> Equação do 2º grau na incógnita x é toda igualdade do tipo
>
> $ax^2 + bx + c = 0$
>
> onde ***a***, ***b*** e ***c*** são números reais e ***a*** é diferente de 0

Veja alguns exemplos de equações do 2º grau na incógnita x:

3. $4x^2 - 3x + 5 = 0$, em que ***a*** = 4, ***b*** = -3 e ***c*** = 5
4. $5x^2 - 8x = 0$, em que ***a*** = 5, ***b*** = -8 e ***c*** = 0
5. $x^2 - 30 = 0$, em que ***a*** = 1, ***b*** = 0 e ***c*** = -30

A expressão $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ é chamada de **forma reduzida** da equação do 2° grau. As equações que não se apresentam na forma reduzida podem ser reduzidas através de algumas transformações.

Por exemplo, reduzir a equação $6x^2 - 4x + 3 = 1 + 4x^2$

$$6x^2 - 4x + 3 = 1 + 4x^2$$
$$6x^2 - 4x + 3 - 1 - 4x^2 = 0$$
$$6x^2 - 4x^2 - 4x + 3 - 1 = 0$$
$$2x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \rightarrow \textbf{(forma reduzida)}$$

Dizemos que uma equação do 2º grau é **completa** quando todos os coeficientes são diferentes de zero. Veja um exemplo

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 \qquad (\boldsymbol{a} = 2,\ \boldsymbol{b} = 4 \text{ e } \boldsymbol{c} = 2)$$

Esta equação do 2º grau é completa pois todos os coeficientes são diferentes de zero.

Dizemos que uma equação do 2º grau é **incompleta** quando os coeficientes ***b*** ou ***c*** são nulos, isto é, ***b*** = 0 ou ***c*** = 0. Note que se ***a*** = 0 então a equação não é do 2º grau.

EXERCÍCIOS

E2.1 - Encontre os valores ***a***, ***b*** e ***c*** em cada uma das equações do 2º grau e classifique-as em **completa** ou **incompleta**.

a) $x^2 - x + 10 = 0$

b) $- x^2 = 0$

c) $4x^2 - 3x = 0$

d) $2x^2 - 2x + 2 = 0$

E2.2. - Escreva dois exemplos de:

a) equação do 2º grau completa

____

b) equação do 2º grau incompleta

____

5.1. RESOLVENDO EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU

5.1.1. EQUAÇÕES INCOMPLETAS

Resolução da equação incompleta $ax^2 + bx = 0$

Sabendo que dados dois números reais **x** e **y** onde $\boldsymbol{x \cdot y = 0}$, então $\boldsymbol{x = 0}$ ou $\boldsymbol{y = 0}$. Com essa propriedade podemos resolver a seguinte equação $x^2 - 10x = 0$ por meio de sua fatoração:

$$x^2 - 10x = 0$$
$$x\,(x-10) = 0$$

Aplicando a propriedade anterior vemos que $x = 0$ (**1ª raiz**) ou $x = 10$ (**2ª raiz**). Consideremos $\boldsymbol{x_1}$ sendo a **1ª raiz** e $\boldsymbol{x_2}$ a **2ª raiz**

Portanto o conjunto solução é **S = {0,10}**

Para resolver equações incompletas da forma $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ utilizamos fatoração e em seguida a propriedade acima. Veja:

$ax^2 + bx = 0$
$x(ax + b) = 0$
$x = 0$ ou $x = \frac{-b}{a}$
Portanto $S = \{0, \frac{-b}{a}\}$

Resolução da equação incompleta $ax^2 + c = 0$

Considere a equação do 2º grau, $ax^2 + c = 0$.

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

Sendo $-\frac{c}{a}$ um número maior ou igual a zero, podemos extrair sua raiz quadrada e determinar o conjunto solução da equação.

$$x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$\text{Logo } S = \{\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ e } -\sqrt{-\frac{c}{a}}\}$$

Sendo $-\frac{c}{a}$ um número negativo, o conjunto solução da equação é vazio, pois não há número real cujo quadrado seja menor que zero.

Exemplo: Resolver a equação $x^2 - 9 = 0$

$x^2 - 9 = 0$
$x^2 = 9$
$x = \sqrt{9}$ ou $x = -\sqrt{9}$
$S = \{-3, 3\}$

EXERCÍCIOS

E2.3 - Calcule o conjunto solução das seguintes equações:

a) $x^2 - 3x = 0$ **b)** $x^2 + 8x = 0$

c) 5$x^2 - 18x = 0$ **d)** $3x^2 + x = 0$

E2.4 - Sabe-se que 3 é raiz de $5x^2 - 15a = 0$ (incógnita x).Qual o valor de a?

E2.5 - Resolva as equações:

a) $x^2 - 16 = 0$ **b)** $-3x^2 + 27 = 0$

c) $5x^2 - 50 = 0$ **d) -**$x^2 + 1 = 0$

5.1.2. COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

Queremos resolver equações de segundo grau completas, isto é, da forma $ax^2+bx+c = 0$, onde todos os coeficientes são não nulos (diferentes de zero).

Se ax^2+bx+c for um trinômio quadrado perfeito, já vimos como fatorá-lo. Neste caso, podemos, de imediato, resolver a equação.

Por exemplo, $x^2 + 6x + 9$ trata-se de um trinômio quadrado perfeito. Sua fatoração é dada por $(x + 3)^2$. Se quisermos resolver a equação $x^2+6x+9 = 0$, podemos fazer uma substituição do trinômio por sua forma fatorada no primeiro membro da mesma. Assim, podemos obter, em seguida, a solução. Veja:

$x^2 + 6x + 9 = 0$

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = 0$

$(x + 3)^2 = 0$

$x + 3 = \pm \sqrt{0} = 0$

$x + 3 = 0$

$x = - 3$

Logo o valor real de x que satisfaz a equação $x^2+6x+9 = 0$ é -3.

Mas e quando o primeiro membro da equação não é um trinômio quadrado perfeito, o que poderíamos fazer ?

Vamos analisar o caso da equação $x^2+4x-12 = 0$:

$x^2+4x-12$ não é um trinômio quadrado perfeito. No entanto, podemos fazer uma transformação a fim de obtermos um. Observe:

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2}_{\text{quadrado de x}} + \underbrace{4x}_{2 \cdot x \cdot 2} = 12 \Rightarrow x^2 + 4x + \underbrace{4}_{\text{quadrado de 2}} = 12 + 4$$

O primeiro passo foi subtrair **12** em ambos os membros da equação. Como podemos ver x^2 é o quadrado de x, enquanto $4x$ é o dobro do produto de x pelo número **2**. Lembre-se que já estudamos isso anteriormente.

Para obter um trinômio quadrado perfeito, finalmente, resta somar “algo” ao primeiro membro da equação. Esse “algo” deve ser o quadrado do número que foi multiplicado ao ***x*** e ao ***2*** para obtermos o valor da segunda parcela da soma. Nesse caso, trata-se do quadrado de ***2***, ou seja ***4***.

Por fim, somamos ***4*** também ao segundo membro da equação para manter a igualdade. Agora é possível fatorar o primeiro membro de modo a resolver a equação. Veja o processo como um todo:

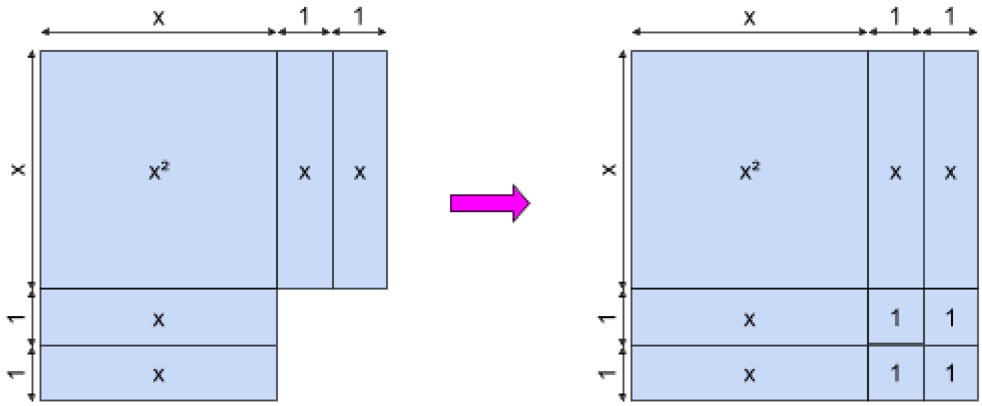
$$x^2 + 4x - 12 = 0$$
$$x^2 + 4x = 12$$
$$x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$$
$$x^2 + 4x + 4 = 16$$
$$(x + 2)^2 = 16$$
$$x + 2 = \pm\sqrt{16}$$
$$x + 2 = \pm 4$$

$$x + 2 = 4 \qquad\qquad x + 2 = -4$$
$$x = 4 - 2 \quad \textbf{ou} \quad x = -4 - 2$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = -6$$

Logo, os dois valores reais de ***x*** que satisfazem a equação inicial são ***2*** e ***- 6***, ou seja, as raízes x_1 e x_2 são ***2*** e ***-6*** .Verifique:

- Se ***x = 2***, então $x^2 + 4x - 12 = (\mathbf{2})^2+4(\mathbf{2})-12 = 4 + 8 - 12 = 0$
- Se ***x = -6***, então $x^2 + 4x - 12 = (\mathbf{-6})^2+4(\mathbf{-6})-12 = 36 - 24 - 12 = 0$

Esse método de resolução é conhecido como **Completamento de Quadrado.** O motivo advém de sua interpretação geométrica. Veja uma representação (fora de escala):



Perceba que na primeira figura, falta algo pra “completar o quadrado”. Fazemos isso incorporando quatro quadrados de área 1. É importante ressaltar que nessa interpretação geométrica, só consideramos o valor positivo de **x**, justamente pela representação gráfica. Contudo, a solução algébrica, como vimos nesse caso, assume dois valores para **x**, entre eles um negativo.

Vamos ver outros exemplos ?

1. Vamos encontrar as raízes de ***16x² - 8x - 3***.

   $16x^2 - 8x - 3 = 0$

   $16x^2 - 8x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (4x)^2 + 2(4)(-1) = 3$

   $(4x)^2 + 2(4)(-1) + (-1)^2 = 3 + (-1)^2$

   $(4x - 1)^2 = 4$

   $4x - 1 = \pm\sqrt{4}$

   $4x - 1 = \pm\ 2$

$4x - 1 = 2$		$4x - 1 = -2$
$4x = 3$	ou	$4x = -1$
$x = \frac{3}{4}$		$x = \frac{-1}{4}$

   $S = \left\{ \frac{-1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$

2. Vamos resolver a equação ***x² - 6x + 10 = 0***:

   $x^2 - 6x + 10 = 0$

   $x^2 - 6x = -10$

   $x^2 - 6x + 9 = -10 + 9$

   $(x - 3)^2 = -1$

Não há solução real neste caso pois o quadrado de (x - 3), qualquer que seja o valor real de x, nunca será um número negativo.

EXERCÍCIOS

E2.6 - Resolva as equações através do método de completamento de quadrado:

a) $x^2 + 6x - 7 = 0$

b) $9x^2 - 6x - 24 = 0$

c) $x^2 - 8x + 18 = 0$

d) $9x^2 - 6x + 1 = 6$

5.1.3. FÓRMULA GERAL PARA RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU

Através do método do completamento de quadrado é possível obter uma fórmula para resolver equações de 2º grau em geral.

Consideremos a equação genérica ***ax² + bx + c = 0***, com coeficientes reais ***a***, ***b*** e ***c***, onde ***a ≠ 0***.

Subtraindo ***c*** nos dois membros da equação e, em seguida, dividindo ambos por ***a***, obtemos:

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Vamos agora completar o quadrado do primeiro membro a fim de obter um trinômio quadrado perfeito. Fazemos isso ao somar $\frac{b^2}{4a^2}$. Por consequência, temos que somá-lo também ao segundo membro para que possamos manter a igualdade.

$$\underbrace{x^2}_{\text{quadrado de x}} + \underbrace{\frac{b}{a}x}_{2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}} + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2}}_{\text{quadrado de } \frac{b}{2a}} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Ao fatorar o trinômio quadrado perfeito que temos no primeiro membro e efetuando a soma do segundo membro, obtemos:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

Em seguida, extraímos a raiz quadrada:

$$(x + \frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ao subtrair $\frac{b}{2a}$ de ambos os membros, finalmente obtemos a fórmula:

$$\boldsymbol{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O valor da expressão ***b²-4ac*** pode ser indicado por Δ (a letra grega maiúscula delta) e é denominado **discriminante** da equação de segundo grau. Assim, podemos escrever:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \textit{onde} \quad \Delta = b^2 - 4ac}$$

Essa fórmula é popularmente conhecida no Brasil como Fórmula de Bhaskara, entretanto, não existem evidências de que Bhaskara, matemático indiano que viveu no século XII, tenha sido o autor da fórmula. Até por isso, outros países não partilham do mesmo hábito, que provavelmente surgiu no Brasil por volta de 1960.

O valor do discriminante(Δ) tem relação com o número de raízes que a equação possui, de modo que:

- Se $\Delta = 0$, a equação tem uma única raiz real dada por $\boldsymbol{x} = \frac{-b}{2a}$;
- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas;
- Se $\Delta < 0$, então $\sqrt{\Delta}$ não será um número real (Lembre-se, não existe valor real para a raiz quadrada de um número negativo!). Sendo assim, a equação não terá raízes reais.

Veja alguns exemplos:

1. Vamos descobrir a(s) raíz(es) de ***$4x^2 - 12x + 9$***.

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$a = 4$; $b= -12$; $c = 9$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$$

$\Delta = \mathbf{0}$, portanto teremos uma única raiz real.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2(4)} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{3}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$ é a única solução real da equação.

2. Vamos resolver a equação ***$7x^2 + 3x + 1 = 0$***:

$a = 7$; $b= 3$; $c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(7)(1) = 9 - 28 = -19$$

$\Delta = \mathbf{-19}$ é um valor negativo, portanto não teremos nenhuma raiz real.

A equação não possui solução real.

3. Vamos resolver a equação ***$-2x^2 - 8x - 5 = 0$***:

$a = -2$; $b= - 8$; $c = -5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(-2)(-5) = 64 - 40 = 24$$

$\Delta = \mathbf{24}$, portanto teremos duas raízes distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{24}}{2(-2)} = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{-4}$$, portanto,

$$\mathbf{x_1} = \frac{8 - 2\sqrt{6}}{-4} = \frac{2(4-\sqrt{6})}{-4} = \frac{-(4-\sqrt{6})}{2} = \frac{-4+\sqrt{6}}{2}$$ é uma raiz, e

$$\mathbf{x_2} = \frac{8 + 2\sqrt{6}}{-4} = \frac{2(4+\sqrt{6})}{-4} = \frac{-(4+\sqrt{6})}{2} = \frac{-4-\sqrt{6}}{2}$$ é a outra raiz.

Logo a solução é dada por $S = \left\{ \frac{-4+\sqrt{6}}{2}, \frac{-4-\sqrt{6}}{2} \right\}$.

EXERCÍCIOS

E2.7 - Na Seção anterior, resolvemos a equação *$16x^2-8x-3=0$* através do método de completamento de quadrado. Faça uma nova resolução se valendo da fórmula geral.

E2.8 - Resolva as equações de segundo grau a seguir:

a) $x^2 - 5x - 6 = 0$ **b)** $6x^2 + x + 1 = 0$

c) $x^2 - 4x = -3$ **d)** $y^2 + 2y - 3$

5.1.4. SOMA E PRODUTO

Vamos considerar a equação $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ e supor que existam as raízes reais x_1 e x_2 (iguais ou diferentes entre si). Vejamos algumas relações importantes que podemos estabelecer com as raízes x_1 e x_2 e os coeficientes ***a***, ***b*** e ***c***.

A soma das raízes

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação, temos:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Somando membro a membro as duas igualdades, temos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Portanto:

Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ $(a \neq 0)$,

então $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

O produto das raízes

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, temos:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Multiplicando membro a membro as duas igualdades, temos:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})\,(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$ então temos que $\dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

Logo:

> Se $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ são as raízes da equação $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ ($a \neq 0$),
>
> então $x_1 \,.\, x_2 = \dfrac{c}{a}$

EXERCÍCIOS

E2.9 - Calcule a soma e o produto de cada equação:

a) $3x^2 - 3x + 30 = 0$ **b)** $2x^2 - x - 15 = 0$

c) $-4x^2 - 1 = 0$ **d)** $3x^2 + x = 0$

E2.10 - Encontre a soma e o produto das raízes da equação $2x^2 - 18x + 30 = 0$

5.2. FORMA FATORADA DO TRINÔMIO DE SEGUNDO GRAU

Vimos neste capítulo diversos tipos de fatoração. Há mais uma caso a se ressaltar, agora que já sabemos como determinar as raízes de uma equação de segundo grau. Trata-se de fatorar o trinômio do segundo grau ***ax²+bx+c***, com **a**, **b** e **c** reais e **a** não nulo. Isso pode ser feito se soubermos as raízes da equação *ax²+bx+c = 0*. Assim:

> $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$,
>
> onde x_1 e x_2 são as raízes (distintas ou iguais) da equação $ax^2+bx+c = 0$

Vejamos alguns exemplos:

1. Vamos descobrir a forma fatorada do trinômio de segundo grau ***4x² - 12x + 9***, que foi um dos exemplos apresentado na seção 5.1.4:

   Sabemos que, nesse caso, ***a*** = 4, e já vimos que $\frac{3}{2}$ é o único valor real que satisfaz a equação *4x²-12x+9=0.*

   Ou seja, $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_2} = \frac{3}{2}$ **.** Assim, devemos ter:

$$4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \tfrac{3}{2}\right)\left(x - \tfrac{3}{2}\right)$$

Vamos verificar! Desenvolvendo o segundo membro temos que chegar no primeiro…

$$4\left(x - \tfrac{3}{2}\right)\left(x - \tfrac{3}{2}\right) = 4\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = 4 \cdot \left(x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = 4 \cdot \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)$$

$$= \mathbf{4x^2 - 12x + 9}$$

2. A forma fatorada de ***x²- 3x - 10***.

   Primeiramente, resolvemos a equação *x²-3x-10=0.*

   a = 1; b= -3; c = -10

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-10) = 9 + 40 = 49$

$\Delta = 49$, portanto teremos duas raízes distintas $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$

$\mathbf{x_1} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2(1)} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$\mathbf{x_1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2(1)} = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Portanto, a forma fatorada do trinômio de segundo grau ***x²- 3x - 10***, é dada por:

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$$

EXERCÍCIOS

E2.10 - Verifique a igualdade do ‘Exemplo 2’ desta seção, obtendo o produto *(x-5)(x+2).*

E2.11 - Fatore os trinômios de segundo grau a seguir:

a) $x^2 - 12x + 36$ **b)** $x^2 + 5x + 4$

c) $6x^2 + x - 2$ **d)** $4x^2 - 11x + 6$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

EC1.1 - Encontre os coeficientes, determine se cada equação é completa ou incompleta, se possível encontre o conjunto solução e calcule o produto e a soma das raízes:

a) $7x^2 - 8x + 30 = 0$ **b)** $x^2 + x = 0$

c) $2x^2 - 2 = 0$ **d)** $4x^2 - x + 6 = 0$

EC1.2 - Um retângulo, cuja altura mede 2 a mais que a base, possui área igual a 48. Determine o perímetro desse retângulo.

EC1.3 - Um triângulo retângulo com catetos congruentes (de mesma medida) possui área igual a 32 cm². Determine a medida dos catetos desse triângulo.

EC1.4 - Um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 3m a mais que o maior cateto e o maior cateto mede 3m a mais que o menor cateto possui perímetro medindo quanto?

EC1.5 - Encontre o número que multiplicado pelo seu sucessor tem como produto 132.