MAT1513 - Laboratório de Matemática - Noturno
Professor David Pires Dias - 2012
TI3 - Trabalho Individual III

Logaritmos - um pouco da história

Os Logaritmos foram inventados, de maneira independente, por John Napier (1550-1617), barão escocês, teólogo e matemático, e por Jost Bürgi (1552-1632), suíço, matemático e fabricante de instrumentos astronômicos. Segundo os historiadores, sem que nenhum tivesse conhecimento do outro, as tabelas de logaritmos de Napier foram publicadas em 1614 e as de Bürgi em 1620. Os dois procuravam resolver o problema de simplificar as longas operações de multiplicacão e divisão que vinham exigindo os recentes desenvolvimentos da Astronomia e da Navegação, tanto envolvendo números muito grandes como frações decimais muito pequenas.

Para elaborar suas tabelas eles utilizaram uma idéia, já bem conhecida naquele tempo, que relaciona progressões aritméticas com progressões geométricas. Numa publicação de 1544, Michael Stifel havia colocado lado a lado uma PA e uma PG no seu livro "Aritmética Integra" para observar uma relação interessante, a de que a multiplicação de termos numa PG corresponde à adição de termos da PA. Considerando

$PA:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\dots$
$PG:$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

então, por exemplo, para obter o resultado de 16×64, basta ver que:

- 16 na 2^a linha corresponde a 4 na 1^a.
- 64 na 2^a linha corresponde a 6 na 1^a.
- que $4 + 6 = 10$ e que
- 10 na 1^a linha corresponde a 1024 na 2^a.

Portanto, uma vez que $16 \times 64 = 1024$, a operação produto fica reduzida à adição que é uma operação bem mais simples.

Naquela época ainda não havia sido introduzida a *notação de potência* (2^n) e nem era identificada a *idéia de função.* Somente um século depois é que essas idéias e algumas notações vieram a ser desenvolvidas por René Descartes e Pierre de Fermat. Na ausência desses instrumentos a correspondência entre os termos da PA e da PG era dada pela contiguidade da escrita. Stifel observou explicitamente que:

I. soma na PA corresponde a produto na PG

II. diferença na PA corresponde a quociente na PG.

Exercício 1 *Através da correspondência acima, diga quanto vale:*

a) 32×128

b) $2048 \div 256$

c) 16×1024

d) $8192 \div 512$

Exercício 2 *Através da notação de potência que você conhece e utiliza atualmente, justifique as duas regras descritas por Stifel.*

Napier utilizou, como razão, na sua PG, um número um pouco menor do que 1, a saber 0,9999999 ($= 1 - 10^{-7}$) enquanto que Bürgi empregou uma razão algo pouco maior do que 1, qual seja 1,0001 ($= 1 + 10^{-4}$) e desse modo obtiveram PGs cujos termos consecutivos eram números muito próximos. Ambos colocaram como termo inicial das suas progressões geométricas números grandes (observe os valores de a_0 e b_0, definidos a seguir), deixando a impressão de que, de fato, eram os produtos de grandes números com muitos dígitos que mais estavam interessando. De qualquer maneira já era conhecida a possibilidade de mudar a posição da vírgula multiplicando por potências de 10. Em notação moderna, a primeira tabela de Napier era formada pelos primeiros 100 termos da progresão geométrica cujo termo geral é:

$$a_n = 10^7(1 - 10^{-7})^n \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, ..., 100.$$

Exercício 3 *Escreva os três primeiros termos da tabela de Napier, isto é,* a_1, a_2 *e* a_3.

A tabela de Bürgi descrevia os termos da progressão geométrica dada por:

$$b_n = 10^8(1 + 10^{-4})^n \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, ..., 23.027.$$

o número 23.027 talvez se deva ao fato de $(1 + 10^{-4})^{23.027}$ ser a maior aproximação por falta 10^8.

Para você ter uma idéia de como essas tabelas eram utilizadas, faça o exercício a seguir.

Exercício 4 *Construa, com o auxílio de uma calculadora, a progressão geométrica cujo termo geral seja* $c_n = (1 + 10^{-3})^n$ *até o termo* c_{10} *e calcule um valor aproximado de* 1004006×1006015 *utilizando esta tabela.*

Napier parece ter ficado muito entusiasmado com seu trabalho, ao qual deu o nome de "Mirifici logarithmorum canonis descriptio": uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos (Logaritmo, palavra inventada por Napier juntando "logos" e "aritmos", número de razão.

Já Bürgi chamou seu livro sobre o assunto de "Arithmetische und Geometrische Progress Tabules", numa citação objetiva do conteúdo das tabelas.

A influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi maior que a de Bürgi devido as suas muitas publicações e seu relacionamento com professores universitários da época.

Logo após o aparecimento da primeira tábua, ou tabela, de Napier, o matemático inglês Henry Briggs (1561-1631) professor da Universidade de Londres, e depois de Oxford, elaborou juntamente com Napier, uma nova tábua, de mais fácil utilização, contendo os chamados *logaritmos decimais*, que tiram proveito do fato de usarmos um sistema decimal de numeração.

Uma tábua de logaritmos consiste essencialmente de duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número da coluna à sua direita, chamado seu logaritmo. Para multiplicar dois números basta somar seus logaritmos - o resultado é o logaritmo do produto. Para achar, então, o produto dos números basta voltar na tábua, da direita para a esquerda e ler qual o número que tem aquele logaritmo.

Analogamente

- para dividir dois números basta subtrair seus logaritmos.
- para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente.
- para extrair a raiz n-ésima de um número basta (complete) ....

A utilidade original dos logaritmos resulta, portanto, da observação: o trabalho de elaborar uma tábua de logaritmos por mais longo e cansativo que seja, é um só. Depois dele feito ninguém precisa mais, digamos, efetuar *multiplicações*, pois *adições* bastam.

Durante os quase 4 séculos que se seguiram à descoberta dos logaritmos sua utilidade revelou-se decisiva na Ciência e Tecnologia. Já Kepler, por volta de 1620, dizia que a nova descoberta "aumentava vastamente o poder computacional do astrônomo".

Com a utilização cada vez mais divulgada das calculadoras, as tábuas de logaritmos perderam sua utilidade como instrumento de cálculo. Mas o estudo dos logaritmos ainda é continuará a ser de central importância, pois o desenvolvimento da Matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são estreitamente relacionados com os logaritmos. Alguns exemplos desses fenômenos são: cálculo de juros contínuos, desintegração radioativa, o método do carbono 14 para identificação da idade de fósseis, ...

Assim sendo, os logaritmos que eram importantes apenas para cálculos numéricos, mostram ter valor intrínseco e muitas aplicações em várias áreas de conhecimento.

Área da região sob o gráfico da hipérbole e acima do eixo x

Consideremos a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e o ramo positivo de seu gráfico, isto é, o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ apenas para valores reais positivos de x (como esboçado na figura 1 ao lado).

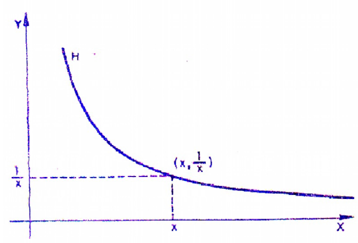

Figura 1

Vamos estabelecer um procedimento para calcular a área da região hachurada na figura 2 ao lado, que é a área sob o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ para $1 \leq x \leq a$ e acima do eixo x. Vamos denotar essa região por H_1^a.
Por meio de pontos intermediários decompomos o intervalo $[1, a]$ num número finito de subintervalos consecutivos.

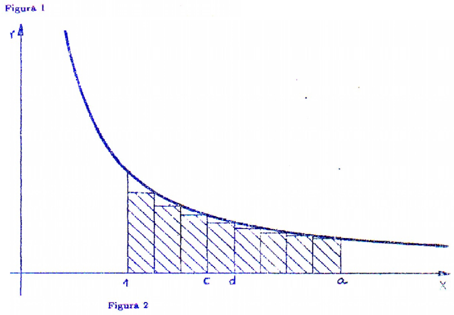

Figura 2

Com base em cada um dos intervalos $[c, d]$ (figura 2) da decomposição consideramos o retângulo de altura igual a $\frac{1}{d}$. O vértice superior direito desse retângulo encontra o gráfico da hipérbole no ponto $\left(d, \frac{1}{d}\right)$. Cada um desses retângulos é um retângulo inscrito na região H_1^a.

A soma das áreas desses retângulos será utilizada para obter aproximações (por falta) da área de H_1^a. Note que é fácil calcular a soma das áreas dos retângulos quando se conhecem os pontos da subdivisão do intervalo.

Vejamos um exemplo, ou melhor, vamos considerar a região H_1^3.
Na figura 3 tomamos a decomposição do intervalo [1,3] através dos pontos $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$.

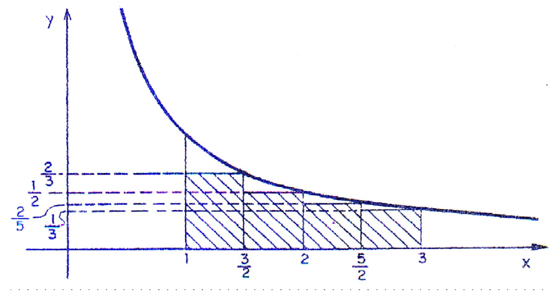

Figura 3 – Uma primeira aproximação para a área de H_1^3.

Exercício 5 *Determine o valor da soma das áreas dos retângulos hachurados na figura 3.*

Se porém efetuarmos uma subdivisão mais fina do intervalo [1,3], por meio dos pontos $1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, 3$ (como na figura 4 ao lado) obtemos 8 retângulos inscritos como na figura 4.

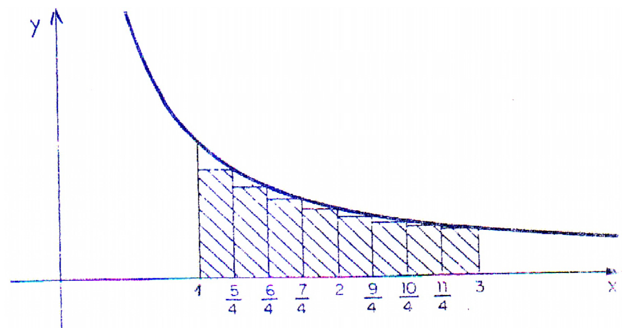

Figura 4 – Uma aproximação melhor para a área H_1^3.

Exercício 6 *Determine o valor da soma das áreas dos retângulos hachurados na figura 4.*

Cada subdivisão do intervalo $[1, a]$, para a um número real maior do que 1, a soma das áreas dos retângulos inscritos fornece um valor aproximado por *falta* da área da região H_1^a. Tanto melhor será essa aproximação quanto mais fina for a subdivisão do intervalo $[1, a]$. Isto é, quanto mais pontos estiverem sendo considerados na subdivisão, menor será a diferença entre o "valor exato da área" de H_1^a e a soma das áreas dos retângulos inscritos. Assim podemos definir a *área (inferior) de* H_1^a como sendo o número real cujas aproximações por falta são as somas das áreas dos retângulos inscritos em H_1^a, que se obtém fazendo-se subdivisões sucessivas do intervalo $[1, a]$. Podemos também dizer que a área de H_1^a é o *extremo (cota) superior* do conjunto dos números que se obtém somando-se as áreas dos retângulos inscritos com subdivisões cada vez mais finas.

Exercício 7 *Voltando ao exemplo do intervalo [1,3], decida, justificando, se a área* (H_1^3) *é maior,igual ou menor do que 1.*

Exercício 8 *Comprove que área* $(H_1^2) < 1$ *utilizando uma aproximação por excesso desta região sob o gráfico da parábola, ou seja, construindo algum polígono que a contenha e que você saiba calcular o valor da sua área.*

Bibliografia:

Druck, I.F. Um pouco de história de potências, exponenciais e logaritmos. RT-MAT 95-24, IME-USP, 1995.

Lima, E. L. Logaritmos, IMPA-VITAE, 1991