MAT1513 - Laboratório de Matemática - Noturno
Professor David Pires Dias - 2012
TI2 - Números complexos

Um pouco de história

Historicamente, os números complexos não apareceram no formato segundo o qual os conhecemos hoje em dia.

Na primeira metade do sec. XVI Stifel ($\sim$ 1487-1567) em sua *Arithmetica integra*, apresentara um tratamento completo de Álgebra tal como era geralmente conhecida até 1544, mas num certo sentido pelo ano seguinte já estava completamente superada. Stifel deu muitos exemplos levando a equações quadráticas, mas nenhum de seus problemas levava a cúbicas mistas. Mas em 1545 a resolução não só da cúbica como também da quártica tornaram-se conhecimento comum pela publicação da *Ars magna* de Gerônimo Cardano (1501-1576). Um progresso tão notável e imprevisto causou tal impacto sobre os algebristas que o ano de 1545 frequentemente é tomado como marco do início do período moderno na matemática. Deve-se assinalar imediatamente, porém, que Cardano não foi o descobridor original da solução quer da cúbica quer da quártica. Ele próprio admitiu isso francamente em seu livro. A sugestão para resolver a cúbica, ele afirma, lhe tinha sido dada por Niccolò Tartaglia (cerca de 1500-1557); a solução da quártica tinha sido descoberta primeiramente por Ludovico Ferrari (1522-1565).

Quando Cardano publicou sua *Ars Magna*, ele era provavelmente o mais competente algebrista da Europa. Caso após caso de equação cúbica é laboriosamente tratado em detalhe conforme termos dos vários graus apareçam de um mesmo lado ou de lados opostos da igualdade, pois os coeficientes eram necessariamente positivos. Apesar de tratar de equações sobre números, ele, como al-Khowarizmi, pensava geometricamente, de modo que podemos consideram seu método como sendo de "completação do cubo".

Cardano pensava em suas equações com coeficientes numéricos específicos como representantes de categorias gerais. Por exemplo, quando escrevia, "seja o cubo e seis vezes o lado igual a 20" (ou $x^3 + 6x = 20$), ele evidentemente estava pensando nessa equação como típica de *todas* as que têm "um cubo e coisa igual a um número" isto é, da forma $x^3+px = q$. A solução dessa equação cobre um par de páginas de retórica que agora poríamos em símbolos como segue: Substitua-se x por $u-v$ e suponha-se u e v relacionados de modo que seu produto (pensado como área) é um terço do coeficiente de x na equação cúbica - isto é, $uv = 2$. Substituindo na equação, vem $u^3 - v^3 = 20$; e, eliminando v, temos $u^6 = 20u^3+8$, uma equação quadrática em u^3. Portanto u^3, como é sabido, vale $\sqrt{108}+10$. Da relação $u^3 - v^3 = 20$ vemos que $v^3 = \sqrt{108} - 10$; donde, de $x = u - v$ temos $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$. Tendo efetuado todos os cálculos para esse caso específico, Cardano termina com uma formulação verbal da regra equivalente à nossa solução de $x^3 + px = q$ como

$$x = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}} + \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}}$$

Cardano passava então a outros casos, tais como "cubo igual a coisa e número". Aqui faz-se a substituição $x = u + v$ em vez de $x = u - v$, o resto do método permanecendo essencialmente o mesmo. Nesse caso, porém, há uma dificuldade. Quando se aplica a regra a $x^3 = 15x + 4$, por exemplo, o resultado é $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Cardano sabia que não existe raiz quadrada de número negativo, e no entanto ele sabia que $x = 4$ é uma raiz. Não conseguiu entender como sua regra faria sentido em tal situação. Tinha jogado com raízes quadradas de números negativos em outra situação quando pediu que se dividisse 10 em duas partes tais que o produto fosse 40. As regras usuais da álgebra levam às respostas $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$ para as partes. Cardano se referia a essas raízes quadradas de números negativos como “sofísticas"e concluía que o resultado nesse caso era “tão sutil quanto inútil". Autores posteriores mostrariam que tais manipulações eram de fato sutis mas nada inúteis. É um mérito de Cardano que ele ao menos tenha dado alguma atenção a essa intrigante situação.

Exercício 1 *a) Resolva com detalhe a equação cúbica* $x^3+6x=20$ *conforme indicado no texto.*

b) Ídem para a equação $x^3+15x=4$.

c) Resolva o problema enunciado por Cardano: encontre dois números cuja soma é 10 e cujo produto é 40.

Números complexos atualmente

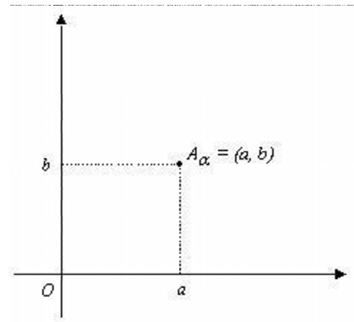
Com a posterior sistematização do assunto, temos que os números atualmente chamados complexos constituem um conjunto $\mathbb{C}$ de objetos que podem ser somados e multiplicados e que satisfazem as seguinte condições:

1. Todo número real é um número complexo, e se α, β são números reais, então sua soma e produto como números complexos são os mesmos que como números reais.
2. Existe um número complexo representado por i tal que $i^2=-1$.
3. Todo número complexo pode ser escrito univocamente na forma $a+bi$, onde a e b são números reais.
4. As propriedades usuais da Aritmética referentes à adição e multiplicação são satisfeitas. E para α, β e γ números complexos, são elas:
   - $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.
   - $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$.
   - $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.
   - $\alpha\beta=\beta\alpha$.
   - $(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$.
   - $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.
   - Se 0 é o número real zero, então, $0\cdot\alpha=0$.
   - Se 1 é o número real um, então, $1\alpha=\alpha$.
   - $\alpha+(-1)\alpha=0$.´
   - Dado $\alpha\neq 0$, existe α^{-1}, tal que $\alpha\alpha^{-1}=1$.

A última das propriedades acima nos diz que $\mathbb{C}$ é um corpo.

Interpretações geométrica e vetorial

A cada número complexo $\alpha=a+bi$ associamos um ponto no plano $A_\alpha=(a,b)$ e dessa forma, <u>em certo sentido</u>, pensar em $\mathbb{R}^2$ é o mesmo do que pensar em $\mathbb{C}$. Podemos mesmo imaginar o número α como sendo representado no plano pelo vetor $\overrightarrow{OA_\alpha}$, como na figura ao lado.



O número a é chamado de parte real de α e o b de parte imaginária de α. Escreve-se: $a = Re(\alpha)$ e $b = Im(\alpha)$.

A operação de adição: Dados a, b, c e d reais definimos $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$, assim sendo, a soma de dois complexos é um novo número complexo.

Exercício 2 *Interprete geometricamente a adição de dois números complexos. Estabeleça uma analogia com a soma de dois vetores.*

A operação de multiplicação: Dados a, b, c e d reais, definimos $(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$. E analogamente o produto de dois números complexos produz também um número complexo.

Exercício 3 *Efetue:*

a) $(2+3i)\cdot(5-i)$

b) $\left(\dfrac{3}{4} - 2i\right)\cdot\left(\dfrac{1}{5} + 4i\right)$

c) Interprete vetorialmente a multiplicação de um número real por um complexo.

Definição 1 *Dado $\alpha = a + bi$ um número complexo; ao número complexo $\overline{\alpha} = a - bi$ chamamos conjugado de α.*

Exercício 4 *Interprete geometricamente a definição acima.*

Exercício 5 *Calcule $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ e interprete geometrica e vetorialmente o número $\sqrt{\alpha\cdot\overline{\alpha}}$.*

Definição 2 *O número $|\alpha| = \sqrt{\alpha\cdot\overline{\alpha}}$ é denominado módulo do número complexo α.*

A operação de divisão: Dados a, b, c e d reais, com $c^2 + d^2 \neq 0$, temos:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = (a+bi)\cdot\frac{c-di}{c^2+d^2}$$

ou seja, dados α e $\beta \neq 0$ complexos,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\cdot\frac{\overline{\beta}}{\beta^2} = \frac{\alpha\overline{\beta}}{\beta^2}$$

Assim, a divisão entre dois números complexos é transformada num produto de complexos (que é um complexo) dividido por um número real (o quadrado do módulo do denominador).

Exercício 6 *a) Dado $\alpha = 3+5i$, calcule $\alpha^{-1} = \dfrac{1}{3+5i}$*

b) Calcule $\dfrac{2-3i}{3+5i}$

c) Calcule $\dfrac{7-zi}{2+i}$

Exercício 7 *Sejam α e β complexos. Mostre que:*

a) $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

b) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$

c) $\overline{\overline{\beta}} = \beta$

Exercício 8 *Mostre que, se α é complexo, $Re(\alpha) \leq |\alpha|$.*

Exercício 9 *Sejam α e β complexos. Mostre que:*

a) $|\alpha \cdot \beta| \;=\; |\alpha| \;\cdot\; |\beta|$

b) $|\alpha + \beta| \;\leq\; |\alpha| + |\beta|$

Exercício 10 *Se $\alpha = a+bi$, mostre que $\alpha - \overline{\alpha} = 2Im(\alpha)$. Mostre também que $Im(\alpha) \leq |Im(\alpha)| \leq |\alpha|$.*

Exercício 11 *Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, considerando as operações de adição e multiplicação por um número real, que foram definidas.*

Bibliografia:

Boyer, C. História da Matemática, Ed. Blücher, São Paulo, 1974.

Lang, S. Cálculo, Ao livro Técnico, Rio de Janeiro, 1971.

Miles, C. P. A emergência dos números complexos, RPM 24, páginas 5-15, 1993.