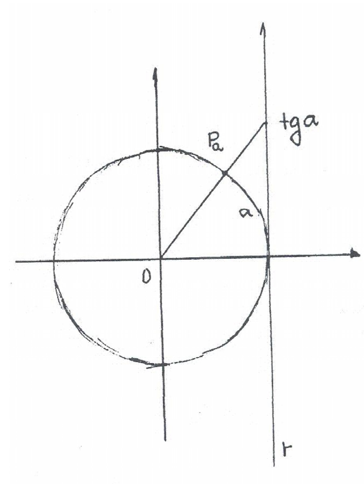
MAT1513 - Laboratório de Matemática - 2012

TI1 - Demais Funções Trigonométricas:

tangente, cotangente, secante e cossecante

David Pires Dias

Tangente



Já vimos que a tangente de um número a é definida por

$$\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}, \; a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \; k \in \mathbb{Z}$$

A tangente de um número a é interpretada geometricamente na figura, onde o raio $\overline{OP_a}$ mede 1.

Note que a reta r é formada pelos pontos $(1, y)$. Um ponto está na reta $\overleftrightarrow{OP_a}$ se for da forma $(k \cos a, \; k \text{ sen } a)$.

No ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP_a}$ com a reta r devemos ter

$$(k \cos a, k \text{ sen } a) = (1, y)$$

Logo, $k = \dfrac{1}{\cos a}$ e $y = \dfrac{\text{sen } a}{\cos a} = \text{tg } a$.

Observe que como a medida do raio é igual a 1, isto é, $m(\overline{OP_a}) = 1$). Então a medida do segmento $\overline{OR}$ é igual a $\dfrac{1}{\cos a}$, ou seja,

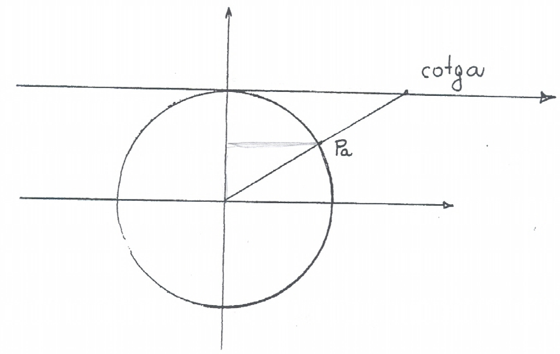
$$m(\overline{OR}) = \frac{1}{\cos a} \,. \tag{1}$$

Cotangente

Definição 1 *Definimos* $\text{cotg } a = \dfrac{\cos a}{\text{sen}\, a}$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Das definições que temos até o momento segue que:

$$\text{tg}\, a = \frac{1}{\text{cotg}\, a}, \quad \text{com} \quad a \neq k\pi \,, \frac{\pi}{2} + k\pi$$



Consideremos agora o eixo s paralelo ao eixo-x passando pelo ponto (0, 1) como na figura ao lado. Este é o chamado eixo das cotangentes da circunferência trigonométrica.
A reta s é formada pelos pontos $(x, 1)$, com $x \in \mathbb{R}$.
No ponto S de intersecção da reta $\overline{OP_a}$ com a reta s teremos

$$(k'\cos\,a,\ k'\text{sen}\,a) = (x,1) \ \text{ e portanto } \ k' = \frac{1}{\text{sen}\,a} \ \text{ e } \ \frac{\cos a}{\text{sen}\,a} = \text{cotg}\,a,\ a \neq k\pi\ , k \in \mathbb{Z}.$$

Observe que analogamente ao caso anterior temos

$$m(\overline{OS}) = \frac{1}{\text{sen}\,a}\ . \tag{2}$$

Secante e Cossecante

Definição 2 *Definimos*

- sec $a = \dfrac{1}{cos\,a}$, $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\, k \in \mathbb{Z}$ *e*
- cossec $a = \dfrac{1}{sen\,a}$, $a \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Assim, segue de (1) e (2) que, para um ângulo a do primeiro quadrante, o valor de $\sec a$ coincide com o comprimento do segmento $\overline{OR}$ e o da $\text{cossec}\,a$ com o comprimento do segmento $\overline{OS}$ (confrontar as figuras anteriores).

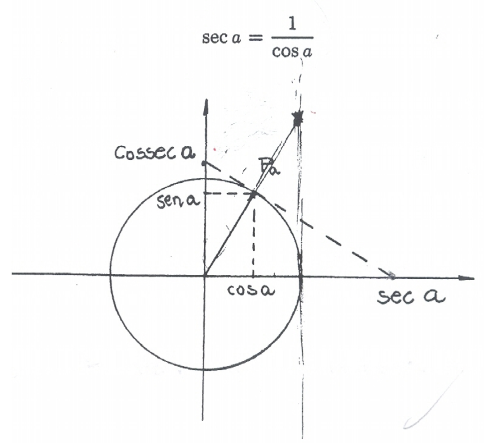
Exercício 1: Estenda essa última interpretação geométrica para os valores de secantes e cossecantes de ângulos dos 2º , 3º e 4º quadrantes, adotando uma convenção para atribuições de sinais (+ ou -) que torne a interpretação compatível com as definições dadas.

Observe que o Teorema de Pitágoras nos permite concluir:

$$1 + \text{cotg}^2\,a = \text{cossec}^2\ a \quad \text{e} \quad 1 + tg^2\,a = \sec^2\ a\ .$$

Outra interpretação geométrica para Secantes e Cossecantes

Consideremos mais uma vez o ponto P_a na circunferência trigonométrica, extremidade do arco AP_a de comprimento $a \in I\!R$, como na figura ao lado. Se por P_a traçarmos a tangente geométrica à circunferência, seja Q o ponto de intersecção desta reta com o eixo das abscissas. Seja R o ponto de coordenadas (1, tg a) sobre o eixo das tangentes trigonométricas.



Observemos que os dois triângulos retângulos OAR e OP_aQ possuem, além de um ângulo reto, o $\widehat{AOP_a}$ em comum e portanto seus três ângulos têm a mesma medida. Logo eles são semelhantes. Como o cateto $\overline{OP_a}$ do ΔOP_aQ e o cateto $\overline{OA}$ do ΔOAR têm medida 1, por serem raios da circunferência trigonométrica, podemos concluir que os dois triângulos são congruentes. Portanto suas hipotenusas têm a mesma medida, ou seja:

$$\sec a = m(\overline{OR}) = m(\overline{OQ}).$$

Tudo isso nos leva a uma segunda interpretação geomértica igualmente importante para o valor de $\sec a$, com a no $1^{\underline{o}}$ quadrante. Observando que o ponto intersecção do eixo-x com a tangente (geométrica) ao círculo tem por coordenadas $Q = (0, \sec\ a)$, podemos concluir que os valores das secantes podem ser localizados no próprio eixo dos cossenos (abscissas).

Exercício 2: Verifique que essa segunda interpretação geométrica atribui automaticamente valores positivos ou negativos para as secantes que são coerentes com as definições iniciais dadas para $\sec a$ de ângulos situados nos $2^{\underline{o}}$, $3^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes.

Exercício 3: Utilizando a figura acima nesta mesma página comprove, de forma análoga ao discutido para secantes, que podemos utilizar o eixo das ordenadas (eixo-y) para determinar o valor da $\operatorname{cossec} a$ $\forall a \in I\!R$ (a em qualquer quadrante da circunferência).

Exercício 4: (Outra abordagem para a segunda interpretação geométrica - por Geometria Analítica).

(a) Determine a equação da reta tangente à circunferência trigonométrica passando pelo ponto $P_a = (\cos\, a,\ \mathrm{sen}\ a),\ a \in I\!R$.

(b) Determine as coordenadas dos pontos de intersecção da reta do item (a) com os eixos coordenados.

Exercício 5: Deduza fórmulas para cotg $(a+b)$ e cotg$(a-b)$.

Exercício 6: Mostre que (para todo $a,\ b$ ou x onde as expressões estiverem definidas):

(a) $\mathrm{tg}^2\,\frac{\mathrm{a}}{2} = \frac{\sec\ \mathrm{a} - 1}{\sec\ \mathrm{a} + 1}$

(b) $\mathrm{cossec}(b-a) = \frac{\sec\ a\ \sec b}{\mathrm{tg}\ b - \mathrm{tg}\ a}$

(c) $\mathrm{cossec}(a+b) = \frac{\mathrm{cossec}\ a\ \mathrm{cossec}\ b}{\mathrm{cotg}\ a + \mathrm{cotg}\ b}$

(d) $\frac{1 - \mathrm{sen}\ x}{1 + \mathrm{sen}\ x} = (\sec\ x - \mathrm{tg}\ x)^2$

(e) $\sec(b+a) = \frac{\sec\ a\ \sec b}{1 - \mathrm{tg}\ b\ \mathrm{tg}\ a}$

Exercício 7: Calcular m para que exista um ângulo x com:

$$\cos\ x = \frac{2}{m-1} \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\ x = \sqrt{m-2}.$$

Exercício 8: Sabendo que $\mathrm{tg}\ x + \sec\ x = \frac{3}{2}$. Calcule sen x e $\cos\ x$.