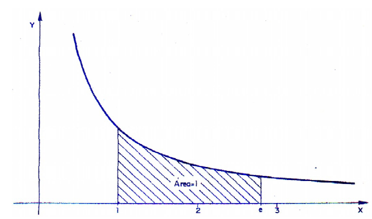
MAT1513 - Laboratório de Matemática - Noturno
Professor David Pires Dias - 2012
TG5 - Trabalho em Grupo V

Função exponencial e o número e

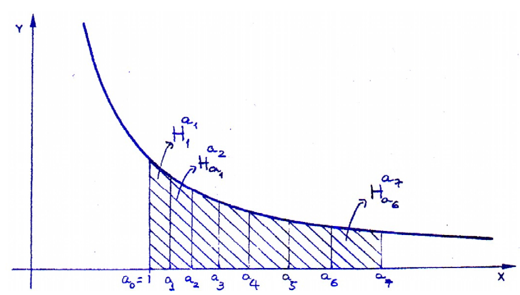
Como a função ln é bijetora, dado o número real 1, existe um único x real, $x > 0$, tal que $\ln x = 1$. Esse número é, por definição, o número e. Logo e é o número tal que $\ln e = 1$, ou seja, é o número tal que área$(H_1^e) = 1$. Uma conseqüência imediata da definição é que $e > 1$. (Justifique)

Por outro lado, já calculamos, aproximadamente, o valor $ln3$, somando áreas de retângulos inscritos em H_1^3. Vimos assim que $ln3 > 1$. Também foi visto que a área$(H_1^2) < 1$, isto é, $ln2 < 1$. Ou seja, já sabemos que $2 < e < 3$, pois ln é uma função estritamente crescente.



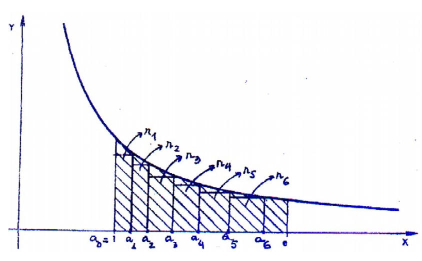
Para obter o valor exato do número e, vamos usar a propriedade que o jesuíta belga, Gregory de St. Vincent, observou em 1647, no livro "Opus geometrium quadratorum circuli et sectionum coni", a respeito das áreas sob o gráfico da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, no ramo em que $x > 0$.

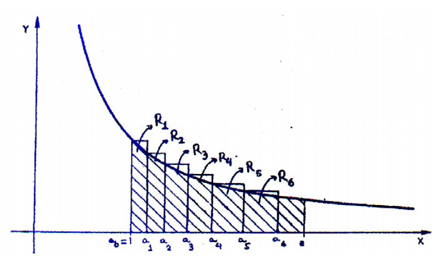
Propriedade: Se escolhermos um número natural n e marcarmos nos eixos das abcissas os pontos $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + \dfrac{1}{n}$, $a_2 = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2, \ldots, a_k = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k, \ldots$ pontos de uma PG de 1º termo igual a 1 e razão igual a $1 + \dfrac{1}{n}$, teremos que as áreas das regiões $H_1^{a_1}, H_{a_1}^{a_2}, ..., H_{a_k}^{a_{k+1}}, \ldots$ (ver figura ao lado) são iguais pela Propriedade Fundamental - enunciada no TG anterior (convença-se disso).



Lembre-se que nosso objetivo é avaliar o número e.

Sejam $r_1, ..., r_n$ e $R_1, ..., R_n$ retângulos conforme as figuras abaixo.





Então, cada retângulo r_i, para $i = 1, 2, ..., n$, tem:

- base medindo $a_i - a_{i-1}$
- altura medindo $\dfrac{1}{a_i}$.

Exercício 1 *Mostre que área* $(r_i) = \dfrac{1}{n+1}$ *e área* $(R_i) = \dfrac{1}{n}$ *para qualquer* $i = 1, ..., n$.

Denotando por A a área da região $H_1^{a_n}$ temos:

$$\text{área}(r_1) + \text{área}((r_2) + \ldots + \text{área}(r_n) < A < \text{área}(R_1) + \text{área}(R_2) + \ldots + \text{área}(R_n),$$

isto é, $\dfrac{n}{n+1} < A < \dfrac{n}{n}$ e portanto $\dfrac{n}{n+1} < A < 1$, para todo $n \in I\!N$.

Fazendo $n \to \infty$ temos $A \to 1$, o que nos diz que quando $n \to \infty$ temos área$(H_1^{a_n}) \to 1$.

Como área$(H_1^{\mathbf{e}}) = 1$, podemos concluir que quando $n \to \infty$ temos $a_n \to \mathbf{e}$. Numa notação mais precisa e que já conhecemos

$$\boxed{\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Exercício 2 *Complete a tabela abaixo, com o uso de uma calculadora, para encontrar valores aproximados de e.*

n	*2*	*4*	*5*	*8*	*16*	*32*	*64*	*100*	*128*
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$									

Uma vez que a função ln é inversível, podemos considerar sua inversa $\ln^{-1}$ que denominamos <u>*função exponencial*</u> e utilizamos para ela a notação $\ln^{-1}(x) = \exp x$. Temos portanto que por definição

$$\boxed{y = \exp x \Leftrightarrow x = \ln y.}$$

Observe que geometricamente, $y = \exp x$ é a abcissa que devemos tomar para que área$(H_1^y) = x$, se $y > 1$ e que área$(H_y^1) = -x$, se $0 < y < 1$.

Exercício 3 *Determine o* $Dom(\exp)$ *e a* $Im(\exp)$.

Exercício 4 *a) Verifique que:*

i. $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ *ii.* $\exp(a - b) = \exp(a)/\exp(b)$

b) Prove que $\exp x$ *é uma função crescente.*

c) Prove que $\exp(x) > 0$ $\forall x \in I\!R$, *que* $\exp(x) > 1$ *se* $x > 0$ *e que* $\exp(x) < 1$ *se* $x < 0$.

Observação 1 *Denotamos também* $\exp(x) = e^x$. *Observe que esta notação se justifica pelas propriedades listadas no exercício anterior (propriedades da potência).*

Exercício 5 *a) Faça uma construção de retângulos inferiores e superiores análoga à feita anteriormente para determinar o valor de e para comprovar que o número real* x_a *tal que área*$(H_1^{x_a}) = a = \ln(x_a)$ *é aquele em que* $x_a = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$, *no caso* $a > 0$ *e* $x_a > 1$.

b) Se $x_a > 1$ *então* $0 < \frac{1}{x_a} < 1$ *e sabemos que* $\ln\left(\frac{1}{x_a}\right) < 0$. *Também sabemos que* $\ln\left(\frac{1}{x_a}\right) = -\ln(x_a)$ *e que* $\ln(x_a) =$ *área*$(H_1^{x_a})$. *Justifique porque vale para todo* $a \in I\!R$ *que* $\exp(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$, *ou, na outra notação,* $e^a = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

Observação 2 *Isso nos dá, em particular que* $e^{-1} = \frac{1}{e} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. *Mais que isso, obtivemos um processo para obter valores aproximados para a potência* e^a, $\forall a \in I\!R$.

Exercício 6 *Utilizando uma calculadora convencional e o item b) do exercício anterior, determine os valores de* $e^{\frac{2}{3}}$ *e de* e^{-2} *precisos até a segunda casa decimal.*