MAT1513 - Laboratório de Matemática - Noturno
Professor David Pires Dias - 2012
TG4 - Trabalho em Grupo IV

Definição de Logaritmo: Logaritmo como área

Consideremos o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$, ou seja, consideremos o ramo positivo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$.
Dados $a, b \in I\!R$ com $0 < a < b$, denotemos por H_a^b a região entre o eixo Ox e a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ com $a \leq x \leq b$, isto é, H_a^b é a região hachurada na figura ao lado.
Questão: Como podemos calcular a área de H_a^b?

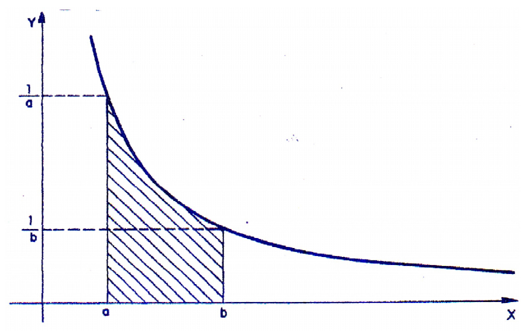
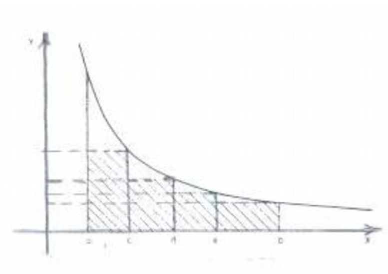


Figura 1

Uma maneira de estimarmos a área de H_a^b seria calcularmos a área de retângulos que estão *sob* ou *sobre* o gráfico da hipérbole no intervalo $a \leq x \leq b$. Analisemos a situação utilizando retângulos que estão it sob o gráfico.

Consideremos um subconjunto finito de pontos $P \subset [a, b]$, tal que $a, b \in P$, ou seja, $P = \{a = t_0, t_1, t_2, ...t_{n-1}, t_n = b\}$ é um subconjunto onde $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = b$. Utilizando estes pontos intermediários do intervalo (esta *partição do intervalo*) podemos decompor o intervalo $[a, b]$ em um número finito de subintervalos consecutivos. Utilizando cada um destes subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ da decomposição, construímos o retângulo de base $[t_{i-1}, t_i]$ e altura $\frac{1}{t_i}$.



Observe que o vértice superior direito de cada um desses retângulos encontra o gráfico da hipérbole no ponto $\left(t_i, \frac{1}{t_i}\right)$. Note ainda, que os pontos $t_{i's}$ não são necessariamente equidistantes, ou seja, a distância entre dois pontos consecutivos não precisa ser necessariamente a mesma. Cada um desses retângulos é chamado de *retângulo inscrito* da região H_a^b. Observe que, neste caso, a soma da área dos retângulos inscritos na região H_a^b fornece uma aproximação *inferior* (por falta) do valor da área da região H_a^b.

Exercício 1 *Considere a região* H_2^6. *Utilizando uma divisão do intervalo* $[2, 6]$ *em quatro partes iguais (uma partição com 5 pontos), estime a área de* H_2^6. *Faça um desenho da situação.*

Exercício 2 *Estime novamente a área da região* H_2^6, *utilizando agora uma subdivisão do intervalo com 8 pontos, isto é, utilizando um subdivisão mais fina do intervalo.*

Exercício 3 *O que você pode concluir dos dois exercícios anteriores?*

Podemos então, neste caso, definir a área (inferior) de H_a^b como sendo o número real cujas aproximações por falta são as somas das áreas dos retângulos inscritos em H_a^b, que se obtém fazendo-se subdivisões sucessivas do intervalo $[a, b]$ [1]. Então se A é a área de H_a^b e B é a soma da área de retângulos inscritos, temos que $A \geq B$.

[1]Para aqueles que já se sentem bem com a linguagem de limite, temos aqui um exemplo em que a área de H_a^b é o limite das somas das áreas do retângulos inferiores quando o tamanho do maior intervalo da partição tende a zero

Passemos agora a estudar uma **propriedade fundamental das áreas das regiões do tipo H_a^b**.

Propriedade Fundamental: *Sejam $k > 0$ e $0 < a < b$. Então as regiões H_a^b e H_{ak}^{bk} tem a mesma área.*

Para verificar a propriedade, observamos primeiramente que dado um retângulo inscrito na região H_a^b, cuja base é o intervalo $[c, d]$, podemos construir um retângulo de base $[ck, dk]$, que está inscrito na região H_{ak}^{bk} com a mesma área que o primeiro.

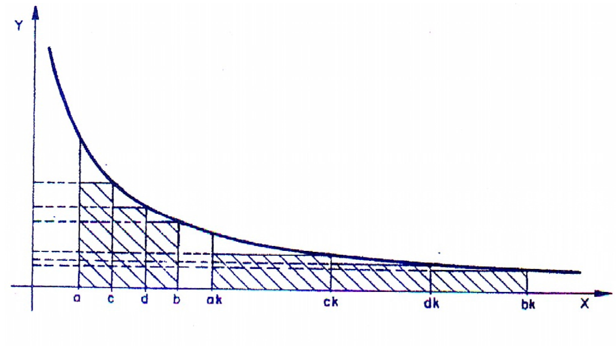


Figura 2

Exercício 4 *Verifique a afirmação anterior.*

Logo quando considerarmos retângulos inscritos em H_a^b podemos encontrar retângulos inscritos em H_{ak}^{bk} com a mesma área que os anteriores. Reciprocamente, dado um retângulo inscrito em H_{ak}^{bk} com base no intervalo $[r, s]$, podemos construir um retângulo cuja base é $[\frac{r}{k}, \frac{s}{k}]$ inscrito em H_a^b com a mesma área que o primeiro. Portanto a soma das áreas dos retângulos inscritos em H_a^b é igual a soma das áreas dos retângulos inscritos em H_{ak}^{bk}. Segue-se então, que a área destas duas regiões possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores, e portanto, são iguais.

Corolário 1 *Segue da propriedade anterior que podemos restringir nossos estudos às áreas das regiões da forma H_1^c, pois para $c = \frac{b}{a}$, temos:*

$$\text{área}(\mathrm{H}_a^b) = \text{área}(\mathrm{H}_1^{\frac{b}{a}}) = \text{área}\mathrm{H}_1^c.$$

Corolário 2 *Se $a > 1$ e $b > 1$, então, usando que $\mathrm{H}_1^{ab} = \mathrm{H}_1^b \cup \mathrm{H}_b^{ab}$ e a propriedade fundamental, temos:*

$$\text{área}(\mathrm{H}_1^{ab}) = \text{área}(\mathrm{H}_1^b) + \text{área}\mathrm{H}_1^a.$$

Assim se definirmos uma função, f, que a cada $x > 1$ associa a área de H_1^x teremos que

$$f(ab) = f(a) + f(b), \text{ para todo } a > 1 \text{ e } b > 1.$$

Questão: Uma vez que estamos considerando regiões que estão abaixo do gráfico $y = \frac{1}{x}$ e acima do eixo x, para $x > 0$, será possível estender a função f para todo o intervalo $]0, \infty[$? Isto é, será possível encontrar uma outra função g cujo domínio é $]0, \infty[$, que coincide com f em $]1, \infty[$ e que conserva a propriedade $g(ab) = g(a) + g(b)$ em $]0, 1]$?

Para mostrar que g existe, vamos procurar uma *candidata* e provar que ela funciona.

Exercício 5 *Mostre que se g é uma função que verifica a propriedade $g(ab) = g(a) + g(b)$, $\forall a, b > 0$, então $g(1) = 0$.*

Temos assim, que a função g procurada deve verificar que $g(1) = 0$. Além disso, note que se $0 < a < 1$, então temos que $\frac{1}{a} > 1$ e a área de $H_1^{\frac{1}{a}} =$ área $H_{1a}^{\frac{1}{a}a} =$ área H_a^1. Então a candidata g verifica que

$$0 = g(1) = g(a\frac{1}{a}) = g(a) + g(\frac{1}{a}) = g(a) + f(\frac{1}{a}) = g(a) + \text{área}H_1^{\frac{1}{a}} = g(a) + \text{área}H_a^1.$$

Logo

$$g(a) = -\text{área}H_a^1, \quad 0 < a < 1.$$

Com isto, podemos então tentar a seguinte definição:

$$g(x) = \begin{cases} \text{área}H_1^x = f(x) & se \quad x > 1 \\ 0 & se \quad x = 1 \\ -\text{área}H_x^1 & se \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

É evidente que g é uma extensão de f [2]. Precisamos mostrar agora que g satisfaz a propriedade $g(ab) = g(a) + g(b)$ para todos a e b estritamente positivos.

Exercício 6 **a)** 1° **caso:** *Se $a > 1$ e $b > 1$ nada temos a fazer. Por quê?*

b) 2° **caso:** *Se $0 < a < b < 1$ então $ab < a$. Por quê?*

$$\left(\acute{a}rea\mathrm{H}_{ab}^1 = \acute{a}rea\mathrm{H}_{ab}^a + \acute{a}rea\mathrm{H}_a^1 = \acute{a}rea\mathrm{H}_b^1 + \acute{a}rea\mathrm{H}_a^1\right) \Rightarrow \left(-\acute{a}rea\mathrm{H}_{ab}^1 = -\acute{a}rea\mathrm{H}_b^1 - \acute{a}rea\mathrm{H}_a^1\right)$$

portanto $g(ab) = g(a) + g(b)$.

c) 3° **caso:** *Se $0 < a < 1 < b$ então $0 < a < 1 < ab < b$ ou $0 < a < ab < 1 < b$. Por quê?*
Se $0 < a < 1 < ab < b$, então $ab > 1$ e $b > 1$, logo

$$\left(\acute{a}rea\mathrm{H}_1^b = \acute{a}rea\mathrm{H}_1^{ab} + \acute{a}rea\mathrm{H}_{ab}^b = \acute{a}rea\mathrm{H}_1^{ab} + \acute{a}rea\mathrm{H}_a^1\right) \Rightarrow \left(\acute{a}rea\mathrm{H}_1^{ab} = \acute{a}rea\mathrm{H}_1^b - \acute{a}rea\mathrm{H}_a^1\right)$$

e novamente $g(ab) = g(b) + g(a)$ como queríamos.

Exercício 7 *Verifique o que ocorre na situação $0 < a < ab < 1 < b$ no último item do exercício anterior.*

Conclusão: Provamos então que existe uma função g, que estende a f inicialmente dada e que verifica $g(ab) = g(a) + g(b)$ para quaisquer $a, b > 0$. Observe que o processo de construção da função g nos garante que ela é única.

Definição 3 *A função g construída é usualmente denotada por* **ln** *e é a função definida em $]0, +\infty[$ dada por:*

$$ln(x) = \begin{cases} \acute{a}rea\ \mathrm{H}_1^x, & se \quad x > 1 \\ 0 & \\ -\acute{a}rea\ \mathrm{H}_x^1, & se \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

E obviamente, pelo que fizemos até agora, esta função satisfaz a propriedade

$$ln(ab) = ln(a) + ln(b), \qquad \text{para todo } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

E também temos

$$\begin{array}{ll} ln(x) > 0 & \text{se, e somente se, se } x > 1 \\ ln(x) = 0 & \text{se, e somente se, se } x = 1 \\ ln(x) < 0 & \text{se, e somente se, se } 0 < x < 1. \end{array}$$

[2]Dados $A' \subset A$ dizemos que $\tilde{\varphi} : A \to B$ é uma extensão de $\varphi : A' \to C$, se $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$, para todo $x \in A'$

Exercício 8 *Verifique, usando a definição dada e as propriedades desenvolvidas até o momento, que:*

(i) $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)$, *para todo* $a > 0$;

(ii) $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$, *para todo* $a, b > 0$;

(iii) $ln(a^n) = nln(a)$, *para todo* $a > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$;

(iv) $ln(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}ln(a)$, *para todo* $a > 0$ *e* $q \in \mathbb{N}^*$;

(v) $ln(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}ln(a)$, *para todo* $a > 0$, $p \in \mathbb{N}$ *e* $q \in \mathbb{N}^*$;

(vi) $ln(a^r) = rln(a)$, *para todo* $a > 0$ *e* $r \in \mathbb{Q}$;

(vii) *a função ln é uma função estritamente crescente, isto é, se* $a > b > 0$ *então* $ln(a) > ln(b)$.

Da afirmação (vii) concluímos que a função ln é uma função injetora, isto é, se $a, b > 0$ e $a \neq b$, então $ln(a) \neq ln(b)$. Prova-se também que a função ln é uma função sobrejetora sobre $\mathbb{R}$, isto é, dado um $b \in \mathbb{R}$ qualquer, sempre existe um $a > 0$ (que neste caso é único) tal que $ln(a) = b$. Note então que esta é uma função bijetora[3].

[3] Para aqueles que se recordam, o fato de $ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ser bijetora nos garante que existe uma única função inversa a esta com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $\mathbb{R}_+^*$.