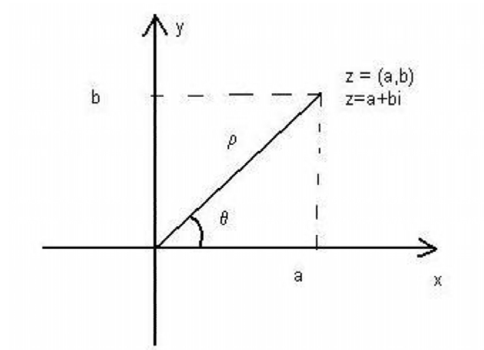
MAT1513 - Laboratório de Matemática - Noturno
Professor David Pires Dias - 2012
TG3 - Números complexos II

Forma Polar



Sabemos que qualquer número complexo $z = a + bi$ pode ser considerado como um ponto (a, b) do plano com

$$a = \rho\text{cos}\theta \qquad\qquad b = \rho\text{sen}\theta$$

e ρ e θ como representados na figura ao lado.
Assim $z = a + bi = (\rho\text{cos}\theta) + (\rho\text{sen}\theta)i$.

Podemos então escrever qualquer número complexo z na forma

$$z = \rho(\text{cos}\theta + i\text{sen}\theta), \qquad \text{onde} \qquad \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad tg\theta = \frac{b}{a}.$$

Tal represemtação é chamada de **forma polar** ou **trigonométrica** do número complexo z.

O ângulo θ é chamado de **argumento** de z e escrevemos $\theta = arg(z)$. Note que $arg(z)$ não é único; quaisquer dois argumentos de z diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π.

Exercício 1 *Escreva os números a seguir na forma polar: (a)* $z = 1 + i$ *(b)* $w = \sqrt{3} - 1$

A forma polar dos números complexos nos dá uma intuição(sugestão) sobre a multiplicação e a divisão. Sejam $z_1 = \rho_1(\text{cos}\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\text{cos}\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$, então

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\text{cos}(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{1}$$

Esta fórmula nos diz que *para multiplicarmos dois números complexos basta multiplicarmos seus módulos e somarmos seus argumentos.*

Exercício 2 *Demonstre a relação apresentada na equação 1.*

Um argumento similar usando as fórmulas de subtração para seno e cosseno mostra que *para dividir dois números complexos dividimos os módulos e subtraímos os argumentos.*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{cos}(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \quad z_2 \neq 0 \tag{2}$$

Exercício 3 *Demonstre a relação apresentada pela equação 2.*

Em particular, tomando $z_1 = 1$ e $z_2 = z = \rho(cos\ \theta + isen\ \theta)$, temos

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\text{cos}\theta - i\text{sen}\theta) \tag{3}$$

Exercício 4 *Demonstre a relação anterior, isto é, a equação 3.*

Exercício 5 *Ache o produto dos números complexos* $1+i$ *e* $\sqrt{3}-i$ *na forma polar.*

Dado $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, temos $z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta)$ e $z^3 = zz^2 = \rho^3(\cos 3\theta + i\text{sen}3\theta)$. Em geral obtemos o seguinte resultado, cujo nome é uma homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

Teorema 1 (Teorema de De Moivre) *Se* $z = \rho(cos\theta + sen\theta)$ *e* n *for um inteiro positivo, então*

$$z^n = [\rho(cos\theta + isen\theta)]^n = \rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)].$$

Isso nos diz que *para elevar à n-ésima potência um número complexo elevamos à n-ésima potência o módulo e multiplicamos o argumento por n.*

Exercício 6 *Prove, por indução, o Teorema de De Moivre.*

Exercício 7 *Enuncie e demonstre o Teorema anterior para* n *um inteiro qualquer.*

Exercício 8 *Sendo* $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, *calcule* $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$. *Represente geometricamente as diferentes potências de* z.

Raízes complexas

O Teorema de De Moivre também pode ser usado para encontrar as n-ésimas raízes de números complexos. Uma n-ésima raiz de um número complexo z é um número complexo w tal que $w^n = z$.

Escrevendo esses dois números na forma polar, isto é, $w = \xi(\cos\phi + i\text{sen}\phi)$ e $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ e usando o Teorema de De Moivre obtemos

$$\xi^n[\cos(n\phi) + i\text{sen}(n\phi)] = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta).$$

A igualdade desses dois números complexos mostra que $\xi^n = \rho$, logo $\xi = \rho^{1/n}$. E além disso, $\cos(n\phi) = \cos\theta$ e $\text{sen}(n\phi) = \text{sen}\theta$.

Do fato de que seno e cosseno têm período 2π segue que $n\phi = \theta + 2k\pi$, ou seja, $\phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$.

Assim $w = \rho^{1/n}\left[\cos\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$. Como dessa expressão resultam valores diferentes de w para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, temos o seguinte:

Raízes de um Número Complexo Seja $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ e n um inteiro positivo. Então z tem as n raízes distintas dadas por

$$w_k = \rho^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

com $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Observe que cada uma das n raízes de z tem um módulo $|w_k| = \rho^{1/n}$. Assim, todas as n raízes de z estão sobre o círculo de raio $\rho^{1/n}$, no plano complexo. Também, uma vez que o argumento de cada uma das n raízes excede o argumento da raiz anterior por $2\pi/n$, vemos que as n raízes de z são igualmente espaçadas sobre esse círculo.

Exercício 9 *Ache as (seis) raízes sextas de* $z = -8$ *e represente-as geometricamente. Conclua!*

Exercício 10 *Determine todas as soluções da equação*

a) $4x^2 + 9 = 0$

b) $x^2 - 8x + 17 = 0$

c) $z^2 + z + 2 = 0$

d) $x^4 = 1$

e) $x^2 - 4x + 5 = 0$

f) $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

Exercício 11 *Escreva o número na forma polar com argumento entre 0 e* 2π.

a) $-3 + 3i$

b) $1 - \sqrt{3}i$

c) $3 + 4i$

d) $8i$

Exercício 12 *Determine a forma polar para* zw, z/w *e* $1/z$ *colocando primeiro* z *e* w *na forma polar.*

a) $z = \sqrt{3} + i, \; w = 1 + \sqrt{3}i$

b) $z = 4\sqrt{3} - 4i, \; w = 8i$

c) $z = 2\sqrt{3} - 2i, \; w = -1 + i$

d) $z = 4(\sqrt{3} + i), \; w = -3 - 3i$

Exercício 13 *Determine as potências indicadas usando o Teorema de De Moivre.*

a) $(1 + i)^{20}$

b) $(1 - \sqrt{3}i)^5$

c) $(2\sqrt{3} + 2i)^5$

d) $(1 - i)^8$

Exercício 14 *Determine as raízes indicadas. Esboce as raízes no plano complexo.*

a) As raízes oitavas de 1

b) As raízes quintas de 32

c) As raízes cúbicas de i

d) As raízes cúbicas de $1 + i$

Bibliografia: Stewart, J. Cálculo, vol I, São Paulo: Pioneira Thomson Lear ning, 2001.