MAT1513 - Laboratório de Matemática - 2012
TG2 - Trigonometria
Professores David e Iole

O Ciclo e as Funções Trigonométricas

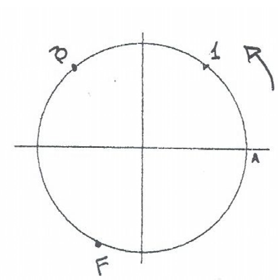
A CIRCUNFERÊNCIA ORIENTADA

Para prosseguir vamos considerar uma circunferência de raio 1 e tendo em mente o que foi discutido até aqui vamos identificar os ângulos e arcos correspondentes. Assim, para simplificar a nossa comunicação, vamos nos referir sem distinção ao ângulo π e ao arco π.

Vamos associar a cada número real um ponto sobre uma circunferência de raio 1, para depois disso podermos definir as funções trigonométricas de qualquer número real. Isto será feito da seguinte forma:

Sobre uma circunferência C de raio 1 vamos fixar um ponto A que será a origem dos arcos e a partir deste ponto vamos escolher o sentido anti-horário de percurso sobre a circunferência como sendo positivo para a representação dos arcos. Isto é, definimos a medida algébrica de um arco AB no sentido anti-horário desta circunferência como sendo o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário, e negativo se o sentido do percurso de A para B for horário.

No caso do desenho ao lado, a medida algébrica do arco AB (no sentido anti-horário) é um número positivo igual ao comprimento do arco AB ou a medida em radiano do ângulo central correspondente. Já no caso de arco AF (no sentido horário) sua medida algébrica é um número negativo igual a menos o comprimento do arco AF.

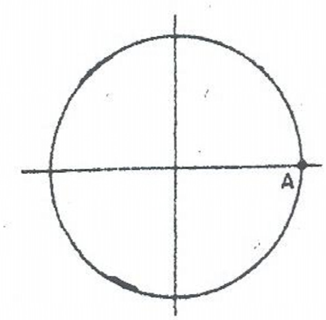


Exercício 1. Represente na circunferência ao lado os pontos correspondentes aos arcos de medidas:

medida de $AB = \dfrac{\pi}{8}$ medida de $AC = \dfrac{3\pi}{4}$

medida de $AD = -3$ medida de $AE = 0$

medida de $AF = 2\pi$



Com o que fizemos até agora para cada número x do intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ corresponde um ponto P_x sobre a circunferência de tal forma que o arco AP_x tenha medida $|x|$ e o percurso de A para P_x seja anti-horário ou horário dependendo do sinal de x.

Como estender esta correspondência para números além deste intervalo?

Vamos definir uma função que a cada número real faz corresponder um ponto P_x na circunferência assim: se x é positivo percorremos sobre a circunferência no sentido anti-horário um comprimento igual a x até determinar P_x, se x é negativo este percurso é feito no sentido horário.

Então se $x < -2\pi$ ou $x > 2\pi$ será necessário dar mais de uma volta na circunferência para atingir P_x num ou noutro sentido. Por outro lado, um dado ponto P da circunferência corresponderá a uma infinidade de números reais distintos, como veremos.

Exercício 2. Quantas voltas serão dadas na circunferência para se representar os números $\dfrac{25\pi}{3}$ e -12?

Exercício 3. Se um ponto K da circunferência corresponde ao número $\dfrac{\pi}{7}$ a que outros números este mesmo ponto corresponde?

Exercício 4. Se um ponto P da circunferência corresponde a um número x, qual é a forma dos outros números que também correspondem a este mesmo ponto? Estes números são as várias determinações do arco AP.

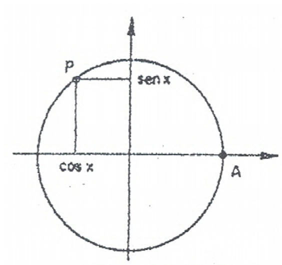
AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos um sistema de coordenadas cuja origem é o centro de uma circunferência C de raio 1 e tome $A = (1, 0)$ a origem dos arcos sobre C. Para cada número real x, seja P_x o ponto na circunferência C onde a medida do arco AP_x é x. Definimos

cos$x$ é o valor da abscissa de P_x

sen$x$ é o valor da ordenada de P_x

$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x}\text{ , se cos}x \neq 0$$



Observe que para $P_0 = A$ é possível definir cos$0 = 1$ e sen$0 = 0$, e para $P_{\frac{\pi}{2}} = (0, 1)$ temos $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercício 5. Calcule ainda os valores de seno e cosseno para $x = \pi, x = \dfrac{3\pi}{2}$ e $x = 2\pi$.

Aqui queremos chamar a atenção para a vantagem de estarmos medindo os ângulos centrais em radianos e **não em graus**. Observe que, não importa a unidade de medida escolhida para a unidade do sistema de coordenadas, teremos os arcos e os ângulos centrais (em radianos) representando os valores de x e os valores de sen$x$, cos$x$ e tgx todos na mesma unidade. Por isso, no Cálculo e em suas aplicações, a convenção adotada é medir ângulos em radianos, para evitar confusões, pois ao estudarmos funções da forma $f(x) = x + \, senx$, por exemplo, se escolhermos como unidade do sistema de coordenadas 1 centímetro, cada ponto $(x, F(x))$ do gráfico desta função terá suas ordenadas expressas em cm.

Exercício 6. Verifique que, para todo número real x, temos: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Exercício 7. Quais são os valores máximos e mínimos para sen$x$ e para cos$x$? O que podemos dizer sobre os valores da função tangente?

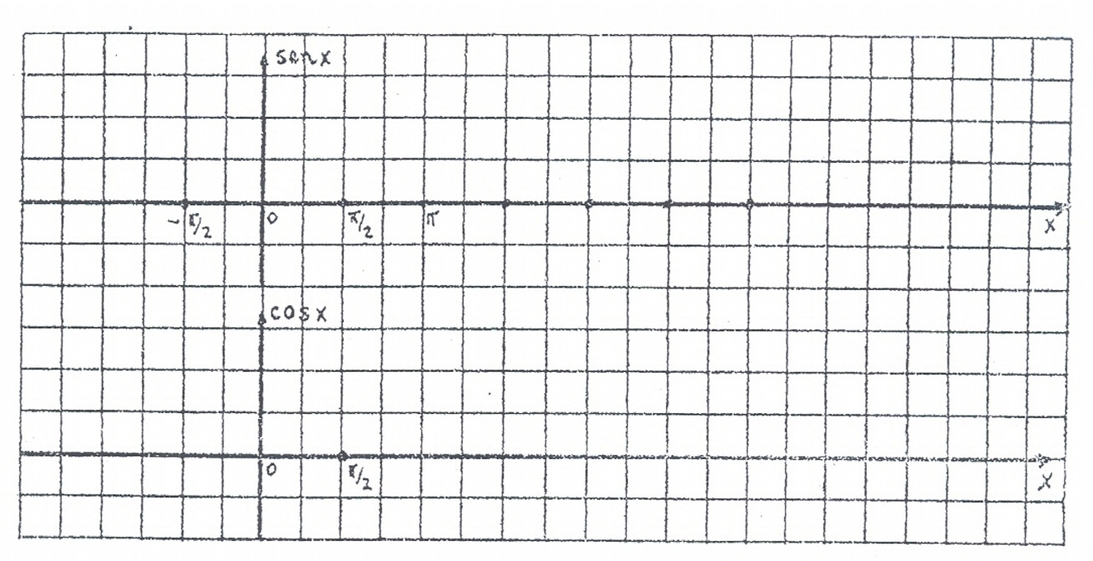
Exercício 8. Para que valores de x não é possível definir tgx?

Exercício 9. Verifique que para todo número inteiro k e todo número real x temos: $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$. Isto quer dizer que a função cosseno é periódica de período 2π. A mesma igualdade vale para as funções seno e tangente? Por quê?

Exercício 10. As funções seno e cosseno mudam de sinal dependendo do valor de x, ou seja, dependendo da posição do ponto P_x em cada um dos quadrantes do sistema de coordenadas. Além disso, estas funções são crescentes ou decrescentes em cada um dos quatro quadrantes. Observe estes fatos e complete a tabela a seguir:

	P_x no 1º Quadrante	P_x no 2º Quadrante	P_x no 3º Quadrante	P_x no 4º Quadrante
seno	positiva e crescente			
cosseno		negativa e crescente		

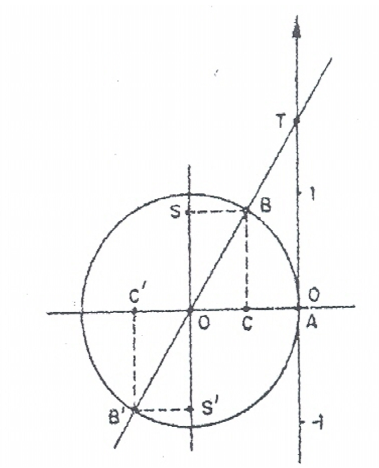
Exercício 11. Com base nos resultados obtidos até aqui faça um esboço dos gráficos das funções seno e cosseno.



Para analisarmos o comportamento da função tg e construirmos seu gráfico é mais adequada uma outra interpretação de tgx sem depender das funções seno e cosseno, mas apenas do ponto P_x.

Para isso, vamos introduzir um outro eixo de coordenadas tendo como origem o ponto A e a direção da reta tangente à circunferência no ponto A, orientada positivamente como o eixo dos y do sistema original. Sobre este eixo escolhemos a unidade de medida igual à do raio da circunferência.

Se $\overset{\frown}{AB}$ é um arco de medida x, a reta que passa por 0 e por B encontra a circunferência em B' e o novo eixo em T. Vamos mostrar que tgx é a medida algébrica de $\overline{AT}$. Para se convencer disso faça os dois próximos exercícios:

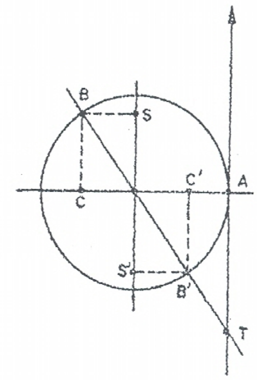


Exercício 12. Se o ponto B está no 1º ou no 3º quadrantes, considere que a medida de $\overline{AB}$ é x e a medida de $\overline{AB'}$ é $x + \pi$. Use a semelhança dos triângulos para completar as igualdades, justificando a validade das mesmas.

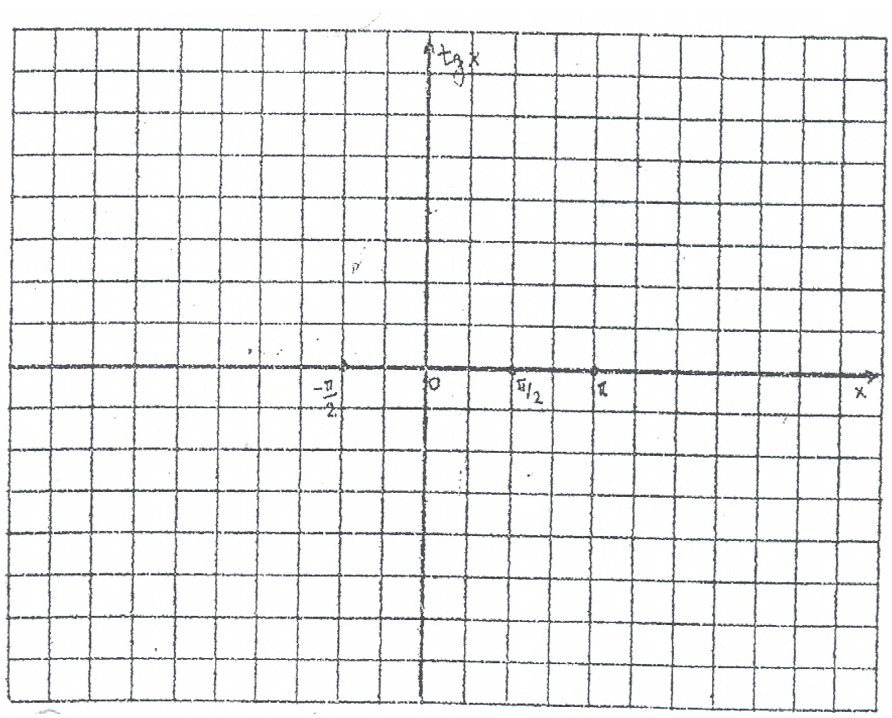
$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \underline{\hspace{4cm}} = \text{medida de } \overline{AT}$$

$$\text{tg}(x+\pi) = \frac{\text{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \underline{\hspace{3cm}} = \text{medida de } \overline{AT}$$

Exercício 13. Se o ponto B está no 2º ou no 4º quadrantes, repita o mesmo raciocínio para concluir que tgx é a medida de $\overline{AT}$ com o sinal negativo.



Exercício 14. Usando esta nova interpretação para tg$x$ e os cálculos feitos, vimos que a função tangente é periódica de período π. Assim, para fazer seu gráfico basta saber seu sinal e o seu crescimento para x nos dois primeiros quadrantes. Utilize essas ideias para esboçar abaixo o gráfico desta função:



Exercício 15. Considere na circunferência trigonométrica orientada do raio 1 dois pontos P_a e P_b (onde a é o comprimento do arco AP_a e b é o comprimento do arco AP_b). Temos então as seguintes coordenadas cartesianas para os pontos:

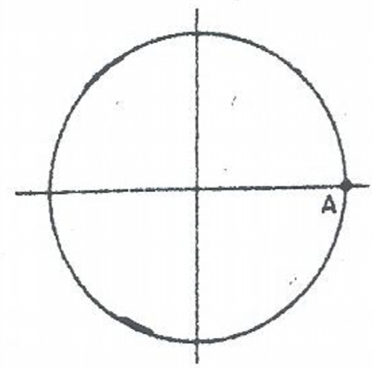
$$P_a = (\cos a,\ \text{sen} a) \quad P_b = (\cos b,\ \text{sen} b) \quad A = (1, 0)$$

i) Explique por que $\cos(a-b) =$ comprimento do segmento $\overline{OC}$.

ii) Sendo d a distância entre os dois pontos P_a e P_b, determine o valor de d^2 utilizando o Teorema de Pitágoras nos seguintes triângulos retângulos:

$$\Delta P_a C P_b \quad \text{e} \quad \Delta P_a D P_b.$$

iii) Igualando as duas expressões obtidas para d^2 em ii), deduza uma fórmula que permita determinar o valor de $\cos(a-b)$ em termos de senos e cossenos de a e b.



Bibliografia básica para este texto: Carmo, M.P., Morgado, A.C., Wagner, E. - Trigonometria , Números Complexos. Coleção do Professor de Matemática - SBM.