**MAT1513 - Laboratório de Matemática - Noturno**

**Prof. David Pires Dias - 2012**

**Trabalho em Grupo 1 - TG1**
**Arcos, ângulos e Trigonometria no triângulo retângulo**

## Medidas de ângulos em graus e em radianos

Nesta primeira etapa do curso abordaremos trigonometria e funções trigonométricas. Para tal iniciaremos retomando os conceitos de ângulos, arcos e suas medidas.

Um *ângulo* é uma figura, ente geométrico, formada por duas semi-retas de mesma origem. As semi-retas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum de seu vértice.

Em geral, representamos um ângulo por $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOA}$, $A\hat{O}B$, $B\hat{O}A$, $\angle AOB$, ou ainda $\angle BOA$, onde $O$ é o vértice do ângulo e $A$ e $B$ são pontos quaisquer, um em cada lado do ângulo.

## Medindo ângulos em graus

Considere uma circunferência centrada em $\theta$ de raio qualquer. Cada ângulo central que corresponde a um arco de comprimento igual a $\dfrac{1}{360}$ do comprimento da circunferência terá medida 1 grau, que representamos por $1^{\text{o}}$.

Temos portanto para o ângulo central, cujo arco corresponde à circunferência completa, a medida de $360^{\text{o}}$. Um ângulo central de $90^{\text{o}}$ determina um arco que corresponde a $\dfrac{1}{4}$ da circunferência e assim por diante.

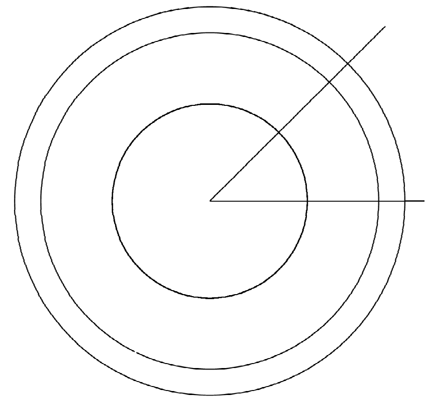
A unidade de medida grau tem o *minuto* e o *segundo* como submedidas. Um minuto corresponde $\dfrac{1}{60}$ de grau e um segundo corresponde a $\dfrac{1}{60}$ de minuto. Representando 1 minuto por $1'$ e 1 segundo por $1''$, ou seja,

$$1^{\text{o}} = 60' \text{ e } 1' = 60'' .$$

## Medindo ângulos em radianos

Dada uma circunferência, estamos acostumados a usar expressões do tipo "arco de 40°", para nos referirmos ao arco que subentende um ângulo central de 40°. Assim, podemos nos referir aos arcos $AB$ e $CD$ como arcos de 40°.

Note que, dado um ângulo, podemos considerar infinitas circunferências centradas no vértice do ângulo. Para cada uma delas, o ângulo dado subentende um arco diferente, cujo comprimento depende do raio da circunferência ao qual ele pertence.



Numa dada circunferência, arcos mais compridos correspondem ângulos centrais (aberturas) maiores. Se você dobra a abertura do ângulo central, dobrará o comprimento do arco subentendido e vice-versa. Daí vem a possibilidade de usar o comprimento de arcos de uma circunferência fixada como medida dos ângulos com vértice no seu centro, para medir a abertura ou o "giro" correspondente a esses ângulos. Por exemplo, um arco de 40° equivale a 1/9 de uma circunferência, enquanto um de 60° equivale a 1/6 da mesma.

Por outro lado, dado um ângulo, podemos considerar infinitas circunferências centradas no vértice desse ângulo. E para cada uma dessas circunferências, o ângulo dado subentende um arco diferente. No entanto, existe uma relação de semelhança entre os arcos da circunferência que correspondem a esse mesmo ângulo central, a saber:

$$\frac{\text{comprimento do arco}\overset{\frown}{AB}}{R_1} = \frac{\text{comprimento do arco}\overset{\frown}{CD}}{R_2} .$$

Em particular, se $C_1$ e $C_2$ são os comprimentos das circunferências de raios $R_1$ e $R_2$, respectivamente, temos que:

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} \quad \text{ou ainda,} \quad \frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2} .$$

**Definição 1** *Definimos então* $\pi = \dfrac{C_1}{2R_1} = \dfrac{C_2}{2R_2}$ *ou ainda,* $\pi =$ *comprimento de um semi-círculo de raio 1.*

Utilizando-se métodos de aproximação do comprimento de circunferências, obtemos aproximações para o valor de $\pi$, por exemplo, $\pi \approx 3,1415926$.

Assim, o comprimento de uma circunferência de raio $R$ é $2\pi R$ e os arcos correspondem a porções da circunferência.

**Definição 2** *A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em uma circunferência cujo centro é o vértice do ângulo e o raio da circunferência.*

Por conveniência, fixaremos no que se segue, uma circunferência de raio 1, pois, neste caso, o ângulo correspondente a uma volta inteira medirá $2\pi$, o de $\frac{1}{4}$ de volta $\frac{\pi}{2}$ e o de $\frac{1}{9}$ de volta $\frac{2\pi}{9}$.

**Observação 3** *Não importa a unidade de medida de comprimento para o raio, pois por exemplo, se o raio do circunferência é igual a 1 km, o arco correspondente ao ângulo de $\pi/4$ radianos mede $\pi/4$ quilômetros; se o raio do circunferência mede 1 polegada, o arco correspondente ao ângulo de $\pi/4$ radianos mede $\pi/4$ polegadas.*

**Exercícios**

1) Mostrar que 1 rad é equivalente a aproximadamente 57º17'44". Use $\pi \approx 3,1415926$

2) Exprimir o equivalente em radianos:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) 45º | (c) 225º | (e) 210º | (g) 270º | (i) 240º | (k) 22º30' |
| (b) 60º | (d) 315º | (f) 300º | (h) 345º | (j) 330º | (l) 31º15'45" |

3) Exprimir o equivalente em graus:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $\pi/6$ rad | (c) $\pi/4$ rad | (e) $2\pi/3$ rad | (g) $5\pi/6$ rad |
| (b) $11\pi/6$ rad | (d) $\pi/3$ rad | (f) $3\pi/4$ rad | (h) $3\pi/8$ rad |

4) Um arco de circunferência mede 30cm e o raio da circunferência mede 10cm. Calcular a medida do ângulo central correspondente.

5) Sobre uma circunferência de raio 10cm marcam-se os pontos A e B de modo que a *corda*[1] $\overline{AB}$ mede 10cm. Calcular a medida do arco menor $\widehat{AB}$.

6) Um decágono regular é inscrito em uma circunferência de raio 1m. Calcular o comprimento do arco determinado por dois vértices consecutivos.

7) Exprimir em radianos os ângulos $\alpha$ e $\beta$ tais que $\alpha - \beta = 15^o$ e $\alpha + \beta = \frac{7\pi}{4}$ rad.

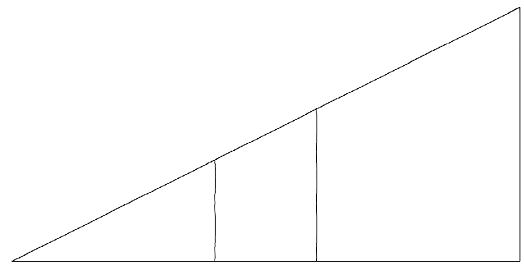
8) Calcular em graus a medida do ângulo central $\widehat{AOB}$ definido numa circunferência de raio 10cm, com AB medindo 3cm.

9) Calcular a medida do ângulo central $\widehat{AOB}$ que determina em uma circunferência de raio $r$, um arco de comprimento $\frac{2\pi r}{3}$.

[1] Segmento de reta com extremos na circunferência.

## As Funções trigonométricas no triângulo retângulo

Analisando a figura ao lado, temos que os triângulos retângulos $\Delta OA_1B_1$, $\Delta OA_2B_2$ e $\Delta OA_3B_3$, são semelhantes, pois possuem ângulos correspondentes congruentes.
Segue-se desta semelhança, as seguintes relações:



$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} \qquad \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OB_3}{OA_3} \qquad \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3}$$

Observe que estas relações dependem apenas do ângulo $\theta$, medido em graus, e não dos comprimentos envolvidos, onde $\theta$ é o ângulo $\widehat{A_iOB_i}$. Podemos então, definir três funções que tem como domínio o intervalo $]0^o, 90^o[$, isto é, consideremos as seguintes funções

$$sen\theta = \frac{A_1B_1}{OA_1} \qquad \cos\theta = \frac{OB_1}{OA_1} \qquad tg\theta = \frac{A_1B_1}{OB_1}$$

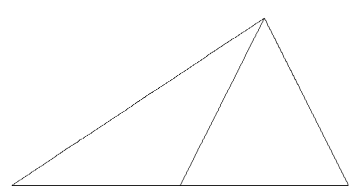
que se chamam, respectivamente, seno de $\theta$, cosseno de $\theta$ e tangente de $\theta$. Observe que a imagem das funções seno e cosseno é $]0,1[$ e da função tangente é $]0,\infty[$, note ainda, que estas funções, chamadas de funções trigonométricas, estão relacionadas entre si.

**Exercício 1:** Demonstre que para $\theta \in ]0^o, 90^o[$ valem as seguintes relações:

(a) $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$, (b) $tg\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$,

(c) $sen(90^o - \theta) = \cos\theta$, (d) $tg(90^o - \theta) = \frac{1}{tg\theta}$.

**Exercício 2:** Calcule o valor de $\cos\theta$, $sen\theta$ e $tg\theta$, para:
(a) $\theta = 30^o$ e $\theta = 60^o$,
(b) $\theta = 45^o$,
(c) $\theta = 36^o$ e $\theta = 18^o$ (Dica: utilize o triângulo isósceles desenhado ao lado).



**Observação 4** *O domínio das funções definidas acima é $]0^o, 90^o[$, no entanto, não nos interessa esta limitação do domínio nem tampouco o uso da unidade grau para a medida dos ângulos, pois queremos definir funções cujos domínios sejam os maiores possíveis dentro do conjunto de todos os números reais. Para isso, precisamos abandonar o triângulo retângulo e procurar um outro modelo geométrico que nos permita estabelecer relações análogas àquelas válidas no triângulo retângulo. E este modelo geométrico é a circunferência orientada de raio unitário.*