MAT1513 - Laboratório de Matemática - 2012
Lista de Exercícios I - Trigonometria

1. Determine $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ e $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. Seja p o lado de um polígono regular de n lados e r o raio do círculo inscrito neste polígono. Mostre que $p = 2r\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

3. A que quadrantes pode pertencer θ, se:

   (a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{-1}{4}$
   (b) $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{3}$
   (c) $\operatorname{tg}\theta = \frac{7}{\sqrt{3}}$
   (d) $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$
   (e) $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\operatorname{tg}\theta < 0$

4. Para que valores de θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ se tem:

   (a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$
   (b) $\cos\theta = 2$
   (c) $\operatorname{tg}\theta = -1$
   (d) $\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

5. Encontre um ângulo θ, $\frac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, tal que $\operatorname{sen}\theta$ seja igual a:

   (a) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$
   (b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$
   (c) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$
   (d) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}$

6. Encontre um ângulo θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, tal que $\cos\theta$ é igual a:

   (a) $\cos \frac{-\pi}{4}$
   (b) $\cos \frac{5\pi}{6}$
   (c) $\cos \frac{4\pi}{3}$
   (d) $\cos \frac{7\pi}{4}$
   (e) $\cos \frac{-11\pi}{4}$

7. Procure estabelecer procedimentos gerais para os exercícios 5 e 6.

8. Verifique que as extremidades dos arcos x e $-x$ são simétricas em relação ao eixo das abscissas; que as extremidades dos arcos x e $\pi - x$ são simétricas em relação ao eixo das ordenadas; que as extremidades dos arcos x e $\pi + x$ são simétricas em relação à origem e que as extremidades dos arcos x e $\frac{\pi}{2} - x$ são simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Conclua assim que valem as igualdades abaixo $\forall x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
   (b) $\cos(-x) = \cos x$
   (c) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
   (d) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$
   (e) $\cos(\pi - x) = -\cos x$
   (f) $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$
   (g) $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$
   (h) $\cos(\pi + x) = -\cos x$
   (i) $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$
   (j) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
   (k) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$
   (l) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x$

9. As desigualdades abaixo são verdadeiras ou falsas? Justifique.

   (a) $\operatorname{sen} 2 > 0$
   (b) $\cos 4 < 0$
   (c) $\operatorname{sen} 3 > \operatorname{sen} 2$
   (d) $\cos 3 > \cos 2$
   (e) $\operatorname{tg} 5 > \operatorname{tg} 6$
   (f) $\cos \frac{\pi}{4} < \cos 1$
   (g) $\cos \sqrt{3} < 1$
   (h) $|\operatorname{sen} 3| > |\operatorname{sen} 4|$

10. a) Mostre que sen $(a+b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$.

    Sugestão: Utilize a expressão de cos $(a-b)$ para os arcos $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ e b.

    b) Deduza a expressão de cos $(a+b)$ a partir da expressão de cos $(a-b)$.

11. Encontre fórmulas, em termos dos senos e cossenos de a e de b, para:

    (a) $\cos 2a$

    (b) $\text{sen } 2a$

    (c) $\text{sen } (a-b)$

    (d) $(\cos a)(\cos b)$

    (e) $(\text{sen } a)(\text{sen } b)$

    Sugestão: Utilize as expressões para cos $(a+b)$ e sen $(a+b)$.

12. Deduza fórmulas para $\text{tg}(a+b)$ e $\text{tg}(a-b)$.

13. Os ângulos agudos a e b são tais que $\text{tg } a = \frac{1}{2}$ e $\text{tg } b = \frac{1}{3}$. Mostre que $a+b = 45°$.

14. Das expressões $\cos^2 a + \text{sen}^2 a = 1$ e $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$ deduza fórmulas para $\cos^2 \frac{a}{2}$ e $\text{sen}^2 \frac{a}{2}$.

15. Mostre que:

    (a) $\cos\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \cdot \cos\frac{(a-\beta)}{2} = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta)$

    (b) $\text{sen}\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \cdot \text{sen}\frac{(a-\beta)}{2} = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos\beta)$

16. Encontre as fórmulas correspondentes para $(\text{sen }\alpha + \text{sen }\beta)$ e $(\text{sen }\alpha - \text{sen }\beta)$.

17. Deduza as seguintes identidades:

    (a) $\text{sen } 2a = \frac{2\text{tg } a}{1+\text{tg}^2 a}$

    (b) $\cos 2a = \frac{1-\text{tg}^2 a}{1+\text{tg}^2 a}$

    (c) $\text{tg } 2a = \frac{2\text{tg } a}{1-\text{tg}^2 a}$

18. Uma pessoa inspira e expira, completando o ciclo respiratório a cada 3 segundos. O volume mínimo de ar nos pulmões é em média de 2 litros e o máximo, 4 litros. Qual das seguintes funções descreve melhor o volume de ar nos pulmões de uma pessoa em função do tempo?

    (a) $y = 2 + 2\text{sen}\left(\frac{\pi t}{3}\right)$

    (b) $y = 3 + \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$

    (c) $y = 2 + \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$

    (d) $y = 3 + \text{sen}\left(\frac{\pi t}{3}\right)$

19. Um observador em uma planície vê ao longe uma montanha segundo um ângulo de 15° (ângulo no plano vertical formado por um ponto no topo da montanha, o observador e o plano horizontal). Após caminhar uma distância d em direção à montanha, ele passa a vê-la segundo um ângulo de 30°. Qual é a altura da montanha?

20. Enuncie e demonstre a lei dos senos.

21. A diagonal de um paralelepípedo retângulo forma com as três arestas concorrentes ângulos α, β e γ. Determine uma relação entre os cossenos desses ângulos.

22. **Leitura complementar**

No sítio do e-calculo, leia sobre:

- Por que usar radiano e não grau?

- Trigonometria do triângulo retângulo.