MAT1513 - Laboratório de Matemática - Noturno
Professor David Pires Dias - 2012

EXPONENCIAL E LOGARITMO DE BASE $a \in I\!R_+$ com $a \neq 1$

No trabalho em grupo anterior vimos como calcular o valor de $\exp(x)$, $\forall x \in I\!R$, ao comprovar que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$.

Também vimos que $\forall a, b \in I\!R$ valem

(i) $\exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b)$ (ii) $\exp(a-b) = \exp(a)\ /\ \exp(b)$

Mostramos ainda que $(\exp(a) = c \leftrightarrow \ln c = a)$ e $\ln e = 1$, logo $\exp(1) = e$.

As propriedades (i) e (ii) são satisfeitas por todas as potências:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \ (\forall a \in I\!R \text{ e } \forall x,\ y \in Q\!\!\!\!\!\;\,\mathbb{}\mathbb{Q}).$$

Também vale que

$$a^1 = a \qquad \forall a \in I\!R.$$

Estes fatos sobre potências e as propriedades descritas acima nos levam a poder encarar a função $\exp(x)$ como uma potência de base e, e assim também é adotada usualmente para a função exponencial a notação e^x, sendo ela chamada de função exponencial de base e. Ou seja, passaremos a convencionar duas notações para a mesma função:

$$\boxed{\exp(x) = e^x}$$

O fato de podermos calcular, por aproximações sucessivas (utilizando o limite "fundamental" do primeiro parágrafo) o valor de e^x para todo $x \in I\!R$ e $\ln a$, para todo $a \in I\!R_+^*$, nos possibilita também definir exponenciais do tipo $a^x (\forall a \in I\!R_+^*$ com $a \neq 1$ e $x \in I\!R)$ como segue:

Definição 1 *Definimos*

$$\boxed{a^x = \exp(x\cdot\ln a)}$$

e chamamos de função exponencial de base a.

Observe que como $a \in I\!R_+$ (e $a \neq 1$) está definido o valor de $\ln a \neq 0$ Assim faz sentido calcular

$$\exp(x\ \ln a) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x\ \ln a}{n}\right)^n.$$

que está bem definido, pois $dom(\exp) = I\!R$.

Com a definição anterior finalmente atribuímos significado a potências de expoente inclusive irracional, não mais apenas via produto iterado ou por meio de radiciação, como é o caso dos expoentes racionais.

<u>FATOS</u>:

1. Para todo $a \in I\!R^+$, $a \neq 1$, a função exponencial de base a tem domínio $I\!R$ e imagem $I\!R^+$, como a função *exp* que a define.

2. A função a^x é estritamente crescente (e portanto inversível), como *exp*, se $a > 1$. Mas a^x é estritamente decrescente (e portanto também inversível), se $0 < a < 1$.

3. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \forall x,\ y \in \mathbb{R}$.

Exercício 1 *Comprove os fatos 1, 2, 3 acima.*

Tais fatos nos possibilitam definir, $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, uma função inversa para a^x.

Definição 2 *Definimos*

$$\boxed{\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x.}$$

($\forall x \in \mathbb{R}^+$ e $\forall a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1$) e chamamos esta nova função de logaritmos de base a.

FATOS:

4) $Dom(\log_a) = \mathbb{R}^*_+$ e $Im(\log_a) = \mathbb{R}$.

5) $\log_a x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

6) (a) $\log_a(a^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ e (b) $a^{(\log_a x)} = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

7) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^+$

Exercício 2 *Comprove os fatos 4, 5, 6 e 7 acima.*

Finalmente, a partir da definição 2, determinemos uma maneira para encontrar o valor de $\log_a x$, para um $a \in \mathbb{R}^*_+,\ a \neq 1$ e $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$.

Como

- (def 2) $\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$
- (def 1) $a^y = \exp(y\ \ln a)$

então $\ln a^y = \ln(\exp(y\ \ln a)) = y\ \ln a$. E portanto $\ln\ a^y = y\ \ln a,\ \forall y \in \mathbb{R}$.

Pelo que vimos até aqui, como $ln(a) \neq 0$, temos

$$\log_a x = y \leftrightarrow\ a^y = x \leftrightarrow \ln x = y\ \ln a \leftrightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

E podemos concluir que:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.}$$