MAT1513 - Laboratório de Matemática - Noturno
Professor David Pires Dias - 2012
TI4 - Trabalho Individual IV

INDUÇÃO FINITA

O método da indução finita é um procedimento matemático para provar propriedades que são verdadeiras para uma seqüência de objetos. É um método bastante utilizado em teoria dos números, geometria, análise combinatória, etc.. Mas trata-se de um tipo de demonstração que pode aparecer em qualquer domínio da Matemática.

Exemplo 1 *Os seguintes resultados podem ser provados por indução.*

i) *Dado* $n \in I\!N$ *vale* $2^n < n!$, *se* $n \geqslant 4$.

ii) *O número de diagonais de um polígono de* n *lados é* $\frac{n(n-3)}{2}$.

iii) *Todo número natural maior ou igual a dois admite decomposição em fatores primos, única a menos da ordem dos fatores.*

Observemos que os três resultados acima falam de propriedade associadas a números naturais e que são afirmadas valer a partir de algum natural inicial (4 no primeiro, 3 no segundo e 2 no terceiro exemplo). Generalizando, o método se aplica para a prova de afirmações que contém no seu enunciado a descrição de alguma propriedade $P(n)$ que é afirmada valer para todo natural $n \geq n_0$, onde n_0 é dado explicitamente ou fica evidente pelo contexto do enunciado.

Princípio da Indução Finita - 1ª Forma

Seja $P(n)$ um enunciado que descreve uma propriedade sobre um número **natural** n maior ou igual a um número natural n_0 fixado.

Definição 2 (PIF 1ª forma) *Se pudermos provar que valem as duas condições:*

C1: $P(n_0)$ *é verdadeira (ou seja, vale a propriedade para* n_0*);*

C2: É verdadeira a implicação $P(n) \to P(n+1)$ *para todo* $n \geq n_0$.

Então podemos afirmar que a propriedade $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \geq n_0$.

No uso prático, para provar um teorema por indução ou recurssão finita devemos assim mostrar que as duas condições do princípio acima estão satisfeitas. Isso nos garante a validade da propriedade para a infinidade de casos aos quais o teorema faça referência.

No caso da segunda condição, como uma implicação só é falsa se sua premissa for verdadeira e a conclusão falsa, basta excluir essa possibilidade para termos a validade da implicação desejada. Assim o que normalmente se faz é tomar um k genérico qualquer maior ou igual a n_0 e admitindo que $P(k)$ seja verdadeiro, mostrar que necessariamente $P(k+1)$ também deve ser verdadeiro. Feita também a prova de que vale a propriedade para o primeiro natural n_0, o princípio da indução nos garante a validade da propriedade em todos os casos afirmados.

Exemplo 3 *Como* $2^4 = 16$ *e* $4! = 4.3.2.1 = 24$, *então vale que* $2^4 < 4!$ *e portanto (C1), a primeira condição do* PIF, *está satisfeita.*

Admitindo que $2^k = k!(*)$ *para um* k *genérico maior do que* 4, *como*

- $2^{k+1} = 2.2^k$
- $(k+1)! = (k+1)k!$
- $(k+1) > 2$, *se* $k > 4$

a partir da desigualdade (*) obtemos que

$$2^{k+1} = 2.2^k < 2.k! < (k+1).k! = (k+1)!$$

Fica assim estabelecida a validade de (C2), a segunda condição do PIF.

Portanto o princípio da indução finita garante que vale $2^n < n!$, *para todo* $n \geqslant 4$.

Princípio da Indução Finita - 2ª Forma

Seja $P(n)$ um enunciado que descreve uma propriedade sobre um número natural n maior ou igual a um número natural n_0 fixado.

Definição 4 (PIF 2ª forma) *Se pudermos provar que valem as duas condições:*

CC1: $P(n_0)$ *é verdadeira (ou seja, vale a propriedade para* n_0*);*

CC2: Para todo $n \geq n_0$, *é verdadeira a implicação*

$$P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge ... \wedge P(n-1) \wedge P(n) \rightarrow P(n+1).$$

Então podemos afirmar que a propriedade $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \geq n_0$.

Na prática, para provar uma propriedade utilizando a segunda forma de indução, devemos provar que a propriedade P vale para n_0 e a seguir, dado um n qualquer maior do que n_0 admitindo que a propriedade P vale para todos os números entre n_0 e n (inclusive), devemos provar que P também vale para $n+1$. Ou ainda, devemos comprovar a seguinte implicação:

$$P(k) \text{ verdadeira para } n_0 \leq k \leq n \rightarrow P(n) \text{ verdadeira.}$$

Essa segunda forma pode ser necessária algumas vezes, como por exemplo no Teorema Fundamental da Aritmética enunciado no item (iii) do primeiro exemplo e cuja existência da decomposição provaremos a seguir (só provaremos a existência neste texto, a unicidade a menos de ordem dos fatores não será feita aqui).

Exemplo 5 *O primeiro número é o 2, que é primo. Como 2 = 2, podemos dizer que 2 admite uma "fatoração"/ única em primos. E portanto (CC1) está satisfeita.*

Admitamos que todos os números entre 2 *e* n, *incluindo* 2 *e* n, *admitem uma fatoração em números primos, única a menos da ordem dos fatores. Consideremos o número* $n+1$. *Existem duas possibilidades:*

a) $n+1$ *é primo, e nesse caso a sua "fatoração" é evidentemente única contendo como único "fator" o próprio primo* $n+1$, *como no caso do número 2.*

b) $n+1$ é composto, por exemplo, $n+1 = p.q$, onde p e q são números naturais menores do que n e maiores ou iguais a 2. Assim, por suposição (logo acima), também chamada de hipótese de indução, tanto p como q admitem deco´mposição em fatores primos. Multiplicando todos os fatores de p pelos fatores de q evidentemente obtemos o número $n+1$.

Como as fatorações de p e q são únicas a menos da ordem dos fatores, deve-se ainda provar que, se houvesse outros primos que fatorassem $n+1$, distintos da fatoração já encontrada, obteríamos também fatorações distintas para p e q, o que não é possível por hipótese. (Essa parte é mais técnica e não faremos aqui, fica como desafio para quem se interessar. Vocês verão a prova completa na disciplina Álgebra I.)

Exercícios

1. Demonstre a validade das seguintes afirmações para n no conjunto dos naturais:

   a) $(1+r)^n \geq 1 + nr$

   b) $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   c) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   d) $1 + r + r^2 + ... + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, para $r \neq 1$

   e) $n < 2^n$

   f) $(1 + 2 + ... + n)^2 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$

   g) $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$

2. Prove o item (ii) do primeiro exemplo utilizando indução finita.

3. Numa ilha existem uma quantidade muito grande de pássaros que são infinitamente inteligentes e cada um sabe da inteligência dos outros. Esses pássaros são muito vaidosos e tem 1 pena colorida no seu rabo que não conseguem enxergar. Se eles descobrem que eles perderam essa pena eles suicidam-se. Eles se encontram só uma vez ao dia. Um dia ao encontrar-se eles são informados que pelo menos um deles perdeu essa pena. Passados n dias pelo menos um pássaro se suicida. Pergunta-se:

   a) Quantos pássaros suicidam-se nesse dia?

   b) Quantos pássaros perderam sua pena?

   (Sugestão: Comece com $n = 1, 2, 3$ depois conjecture algo e prove por indução).

4. Numa certa criação de coelhos o número de coelhos a_n após n meses obedece a seguinte regra: $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, sabe-se também que $a_1 = 3$ e $a_2 = 7$. Mostre que $a_n = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \geq 1$.

5. Numa certa população de gatos o número de gatos em um ano é igual à soma do número de gatos nos dois anos prévios. Se no primeiro ano havia um gato e no segundo dois, mostre que o número de gatos no n-ésimo ano é dado pela fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1}\right].$$

6. O que está errado na seguinte demostração:

   Proposição 6 *Todo conjunto finito não vazio tem 1 elemento.*

Dem: Obviamente vale $P(1)$, ou seja, temos a veracidade de C1 ou CC1.

Assuma que a proposição é válida para $P(n)$ e seja $A = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$, então $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ e $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = x_{n+1}$, logo $x_1 = x_2 = ... = x_{n+1}$ e temos a validade de $P(n+1)$.

■

7. O que está errado no seguinte argumento:

Proposição 7 *Se $a \neq 0$ então $a^{n-1} = 1$ para todo n natural.*

Dem: $P(1) : a^{1-1} = 1$ vale sempre.
Assumindo $a^{k-1} = 1$, temos $a^k = a^k \frac{a^{k-2}}{a^{k-2}} = \frac{a^{k-1}aa^{k-2}}{a^{k-2}} = \frac{a^{k-1}a^{k-1}}{a^{k-2}} = \frac{1.1}{1} = 1$.

■

8. Seja $a_0 = 1$ e, para $n > 0$, seja $a_n = 2a_{n-1} + 1$. Os primeiros termos da sequência $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ são $1, 3, 7, 15, \ldots$ Quais são os próximos três termos? Prove que $a_n = 2^{n+1} - 1$.

9. Seja $b_0 = 1$ e, para $n > 0$, seja $b_n = 3b_{n-1} - 1$. Quais são os cinco primeiros termos da sequência $b_0, b_1, b_2, \ldots$? Prove que $b_n = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

Instruções para os exercícios a serem entregues:

- quatro itens do primeiro exercícios;
- os exercícios 2, 3, 4 e 5;
- um dentre os exercícos 6 e 7;
- um dentre os exercícos 8 e 9.