MAT1513 - Laboratório de Matemática - Noturno
Professor David Pires Dias - 2012
Texto sobre Lógica (de autoria da Professora Iole de Freitas Druck)

A LINGUAGEM DO DISCURSO MATEMÁTICO E SUA LÓGICA

Iniciemos com considerações sobre as afirmações mais simples da linguagem - os enunciados atômicos. Esses refletem propriedades ou relações básicas entre objetos do universo do discurso, sendo seu significado imediato, intuitivo ou indicado por axiomas, no caso da Matemática. A Lógica não decide nada sobre sua verdade ou falsidade, apenas o bom senso, as convenções, as leis sociais ou científicas, etc..

No caso das afirmações compostas, nem sempre é fácil perceber o seu significado e, conseqüentemente, sua validade. Sejam P e Q enunciados atômicos. A seguir consideraremos as frases dos tipos: "não P" ($\neg P$), "P e Q" ($P \wedge Q$), "P ou Q" ($P \vee Q$), "se P então Q" ($P \to Q$), "P se e somente se Q" ($P \leftrightarrow Q$), chamadas, respectivamente, de negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência. Os valores verdade de tais frases são relativamente mais simples de serem analisados, por representarem elas afirmações feitas por meio dos conectivos lógicos. Frases iniciadas pelos quantificadores $\forall$ ou $\exists$, representam afirmações universais ou particulares e não poderão ser analisadas pelas tabelas de verdade a seguir descritas.

As *tabelas de verdade* dos conectivos lógicos devem ser vistas como a explicação do significado (*lógico*) desses símbolos, do significado com o qual eles são empregados sempre na Matemática. Alguns deles têm significado bem intuitivo. Já o significado lógico da implicação, por exemplo, não costuma ser tão intuitivo assim para o iniciante. O importante é perceber que, para a lógica, a verdade, ou o significado verdadeiro é o que transparece destas tabelas.

Definição 1 *(de verdade ou falsidade de afirmações compostas por meio do uso de conectivos lógicos)*

No que segue as letras P e Q representam enunciados atômicos, a letra F abrevia a palavra **falso** *e a letra V abrevia a palavra* **verdadeiro**.

		Negação	*Conjunção*	*Disjunção*	*Implicação*	*Equivalência*
P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Observação 2 *I - A terceira coluna (Negação) nos diz que a lógica é bivalente.*

II - A quinta coluna (Disjunção) nos diz que o **ou** *da lógica é não exclusivo.*

III - A sexta coluna (Implicação) nos diz que "só não é válido sair de algo verdadeiro e chegar em algo falso", através da implicação, ou ainda, que uma implicação só é falsa se sua premissa é verdadeira e sua conclusão é falsa.

A seguir daremos alguns exemplos de aplicação da tabela.

Exemplo 3 *A afirmação* $P\neg \vee P$ *é verdadeira, seja qual for* P*. Esse é o enunciado da lei da lógica conhecida por* PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO*. Vejamos sua tabela de verdade ao lado:*

P	$\neg P$	$\neg P \vee P$
V	F	V
F	V	V

Exemplo 4 *A afirmação* $\neg(P\wedge\neg P)$ *é verdadeira, seja qual for* P*. Esse é o enunciado da lei da lógica conhecida como* PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO*. Examinemos sua tabela de verdade (novamente ao lado):*

P	$\neg P$	$(P \wedge \neg P)$	$\neg(P \wedge \neg P)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Exemplo 5 *A afirmação* $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$ *(equivalência entre uma implicação e a sua contrapositiva) também é sempre verdadeira, independentemente das particularidades das fórmulas* P *e* Q*. Examinemos sua tabela de verdade:*

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P)$	$(P \to Q) \wedge (\neg Q \to \neg P)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Exemplo 6 $P \to (P \vee Q)$ *e* $(P \vee Q) \to P$ *não são afirmações logicamente equivalentes: a primeira vale sempre enquanto a segunda não (sua validade depende do valor de verdade das fórmulas* P *e* Q*), como mostra a tabela abaixo:*

P	Q	$P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$	$(P \vee Q) \to P$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V

Exemplo 7 $(P \vee Q) \leftrightarrow [(\neg P) \to Q]$ *é sempre verdadeira, sendo portanto uma lei da lógica. (Observe que ela justifica o procedimento usual de que, para demonstrar a validade de uma disjunção, nega-se a validade*

da primeira afirmação e demonstra-se que a segunda deve então valer (Por quê?).)

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(\neg P) \to Q$	$(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P) \to Q$
V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Observação 8 *Frases cuja tabela de verdade é verdadeira em todas as suas linhas, como por exemplo,* $P \vee \neg P$, $\neg(P \wedge \neg P)$, $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$, *etc. são chamadas de verdades lógicas, princípios lógicos, ou leis da lógica, pois são verdadeiras, independentemente do valor verdade de suas sub-fórmulas componentes.*

Observação 9 *Frases do tipo* $P \to (P \wedge Q)$ *e* $(P \vee Q) \to P$ *são contingentes, pois são verdadeiras em alguns casos e falsas em outros, dependendo do valor verdade de suas sub-fórmulas componentes* P *e* Q.

Observação 10 *Cabe aqui notar que provamos no exemplo 5 que a afirmação* $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$ *é uma verdade lógica, aliás bastante útil na Matemática ou mesmo em argumentações cotidianas (Por quê?).*

A afirmação $\neg Q \to \neg P$ *é chamada de contrapositiva de* $P \to Q$ *e vimos que as duas são (logicamente) equivalentes.*

Exercício 1 *Determine quais das seguintes afirmações são verdades lógicas e quais são contingentes. Dê uma interpretação intuitiva para as verdades lógicas e contra-exemplos para as contingentes.*

a) $(\neg\neg P) \leftrightarrow P$

b) $P \to (Q \to P)$

c) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \to Q)$

d) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)$

e) $[\neg(P \wedge Q)] \leftrightarrow (\neg Q \vee \neg P)$

f) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \to Q) \wedge (Q \to P)]$

g) $[(P \wedge Q) \to R] \leftrightarrow [P \to (q \to R)]$

h) $(P \vee Q) \vee R \leftrightarrow [(\neg P \wedge \neg Q) \to R]$

i) $[\neg(P \to Q)] \leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)$

j) $[(P \wedge \neg Q) \to (R \wedge \neg R)] \to (P \to Q)$

Falta examinarmos o significado e o valor de verdade das frases que são iniciadas com os quantificadores $\exists$ e $\forall$. Essas frases representam *afirmações* particulares ou universais, respectivamente, a propósito de algum universo de discurso. Ora, os contextos podem incluir quantidades finitas ou infinitas de objetos ou de referentes. Assim não é possível aferir a validade destes tipos de afirmação (existenciais ou universais) pelo simples uso de tabelas de verdades, pois poderíamos necessitar de uma infinidade de linhas (uma para cada objeto do universo do discurso).

Será necessário observar mais de perto todos os possíveis significados atribuíveis às frases. Em algum universo ou contexto uma afirmação pode ser verdadeira mas em outros não. Concretizemos esses comentários em um exemplo.

Considere a seguinte afirmação sobre x, $P(x)$ sendo $P(x) \equiv [2x = 1]$. A frase $(\exists x)P(x)$ será verdadeira no universo dos números racionais, mas será falsa no conjunto dos números inteiros (Por quê?). Por esse motivo dizemos que a fórmula $(\exists x)[2x = 1]$ *não é válida* ou que ela *não é universalmente verdadeira*. Ela é contingente.

A Linguagem da Teoria dos Conjuntos

O discurso matemático também utiliza sistematicamente notações e linguagem próprias à Teoria dos Conjuntos. Essa teoria trata das relações e operações entre conjuntos ou coleções. Um conjunto é uma coleção de objetos (abstratos, no caso dos conjuntos tratados na Matemática), os quais são ditos *elementos* do conjunto considerado.

Na verdade as noções de *elemento* e de *conjunto* são primitivas para a Teoria dos Conjuntos, da mesma forma que as noções de *ponto*, *reta* e *plano* são primitivas para a Geometria Euclideana. Isso quer dizer que elas não são definidas, sendo tomadas como intuitivas. Suas propriedades é que serão detalhadas na Teoria Axiomática dos Conjuntos. Mais ainda, há uma terceira noção primitiva, a relação de *pertinência* (de um elemento a um conjunto), representada pelo símbolo $\in$. Por isso mesmo a linguagem da Teoria dos Conjuntos tem um único tipo de enunciado ou afirmação atômica, envolvendo suas três noções primitivas: $a \in A$, que deve ser lido como *a pertence ao A* ou *a é elemento do conjunto A*.

Apesar de ter tão poucas noções primitivas, a Teoria dos Conjuntos define muitas outras relações e operações entre conjuntos. Cada uma das definições, que daremos a seguir, será assim feita por meio de afirmações compostas (com conectivos e/ou quantificadores) a partir de enunciados atômicos. Nesse texto, introdutório, não desenvolveremos sistematicamente uma teoria axiomática de conjuntos.

Definição das relações e funções mais usuais entre conjuntos

No que segue usaremos as letras dos alfabeto para representar conjuntos e elementos. Sempre que uma letra estiver à esquerda do símbolo $\in$ ela representa um elemento e se estiver à direita do mesmo símbolo, representa um conjunto.

Definição 11 (Relação de inclusão) *Escreve-se $A \subset B$ e diz-se que A está contido em B, A está incluído em B ou B contém A sempre que for verdadeira a afirmação:*

$$\forall a(a \in A \to a \in B).$$

Definição 12 (Relação de igualdade) *Escreve-se $A = B$ e diz-se que A é igual a B, sempre que valerem as duas inclusões $A \subset B$ e $B \subset A$; sempre que os dois conjuntos possuírem exatamente os mesmos elementos, ou, equivalentemente, sempre que for verdadeira uma das seguintes afirmações logicamente equivalentes:*

$$\forall a(a \in A \to a \in B) \wedge \forall a(a \in B \to a \in A) \qquad \textit{ou} \qquad \forall a(a \in A \leftrightarrow a \in B).$$

Definição 13 (Função intersecção) *Escreve-se $A \cap B = C$ e diz-se que a intersecção de A com B é igual a C ou que A intersecção com B é igual a C sempre que for verdadeira a afirmação a seguir:*

$$\forall a[a \in C \leftrightarrow (a \in A \wedge a \in B)].$$

Neste caso também utilizamos a simbologia $A \cap B = \{a | a \in A \wedge a \in B\}$.

Definição 14 (Função união) *Escreve-se $A \cup B = C$ e diz-se que a união de A com B é igual a C ou que A união B é igual a C sempre que for verdadeira a afirmação a seguir:*

$$\forall a[a \in C \leftrightarrow (a \in A \vee a \in B)].$$

Simbolicamente também temos $A \cup B = \{a | a \in A \vee a \in B\}$.

Definição 15 (Função diferença ou complemento relativo) *Escreve-se* $A \backslash B = C$ *e diz-se que a diferença de* A *e* B *é igual a* C *ou que* A *menos* B *é igual a* C*, ou ainda, que* C *é o complemento de* B *em (relação a)* A *sempre que for verdadeira a seguinte afirmação:* $\forall a[a \in C \leftrightarrow (a \in A \wedge a \notin B)]$*. Simbolicamente temos* $A \setminus B = \{a | a \in A \wedge a \notin B\}$*.*

Definição 16 (Função complemento ou complemento absoluto) *Escreve-se* $A^C = B$ *e diz-se que* B *é o complemento de* A *sempre que for verdadeira a afirmação:* $\forall a(a \in B \leftrightarrow a \notin A)$*. E ainda,* $A^C = \{a | a \notin A\}$*.*

Definição 17 (A função unitário de um conjunto) *Escreve-se* $\{A\} = B$ *e diz-se que* B *é o conjunto unitário de* A*, ou que* B *é o unitário de* A*, sempre que for verdadeira a afirmação:*

$$\forall x(x \in B \leftrightarrow x = A).$$

Neste caso escrevemos em simbolos $\{A\} = \{x | x = A\}$*.*

Definição 18 (A função partes de um conjunto) *Escreve-se* $\wp(A) = B$ *e diz-se que* B *é o conjunto das partes de* A*, ou que* B *é o conjunto de todos os subconjuntos de* A*, sempre que for verdadeira a afirmação:*

$$\forall x(x \in B \leftrightarrow x \subset A).$$

Neste caso temos simbolicamente $\wp A = \{x | x \subset A\}$*.*

Observação 19 *As duas últimas definições deixam claro que conjuntos podem ser elementos de outros conjuntos. É, portanto necessário prestar bem atenção no uso dos símbolos* $\in$ *e* $\subset$ *. Repetimos que sempre o que estiver à esquerda do símbolo* $\in$ *é um elemento do conjunto que aparece à direita deste mesmo símbolo. Já o que aparece à esquerda de* $\subset$ *é sempre um subconjunto (e portanto conjunto) do conjunto que aparece à direita. Conjuntos podem pertencer a outros conjuntos (de conjuntos), mas elementos primitivos (como os números na teoria dos números reais, ou pontos na geometria) nunca podem ser escritos à esquerda do símbolo* $\subset$ *ou à direita do símbolo* $\in$ *por não serem conjuntos (não terem elementos). Preste atenção à essas convenções linguísticas para que o emprego da linguagem de conjuntos na escrita simplificada e simbólica da Matemática faça sentido, tanto quando você lê textos como no uso que faça dos símbolos para registrar fatos matemáticos. Tenha certeza de não fazer confusão entre* $\in$ *e* $\subset$ *para poder usufruir da linguagem da Teoria dos Conjuntos para estudar e fazer Matemática!?*

Duas coleções particulares importantes

Desde o início das tentativas de formular uma teoria dos conjuntos, ainda no século XIX, duas coleções abstratas, já utilizadas informalmente há mais tempo, mereceram atenção especial dos matemáticos. São elas a coleção sem nenhum elemento, o chamado *conjunto vazio*, e a coleção de todos os elementos concebíveis, o chamado *"conjunto" universo.*

A primeira coleção foi definitivamente incorporada à Teoria dos Conjuntos e é extremamente importante poder trabalhar com ela na Matemática. Já a segunda, foi incorporada somente às chamadas Teorias de Classes, mais abrangentes que qualquer Teoria de Conjuntos. Isso porque atribuir o status de conjunto à coleção de todos os elementos concebíveis introduz paradoxos no desenvolvimento da teoria formal.

Porém as teorias matemáticas continuam, eventualmente, fazendo referência a conjuntos universo formados pelos elementos sobre os quais elas discorrem. Por exemplo, no Cálculo Diferencial e Integral o universo de variação das variáveis das funções é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais; em Geometria as variáveis referem-se ao universo formado pelos pontos do espaço n-dimensional, e assim por diante.

Em textos mais elementares sobre conjuntos, o uso da expressão conjunto universo é somente uma maneira informal de fazer referência à idéia de conceber em uma única coleção todos os conjuntos possíveis e imagináveis. A definição 16 acima é informal, é usada frequentemente, mas não se enquadra em uma teoria axiomática de conjuntos rigorosa, o que não pretendemos desenvolver nesse texto. Como curiosidade, citaremos o famoso "paradoxo de Russel", para possibilitar uma concretização do tipo de problema que a aceitação de um "conjunto" Universo pode trazer. Consideremos o chamado "conjunto de Russel":

$$R = \{A|A \notin A\}$$

(R é o conjunto dos conjuntos A que não pertencem a si mesmos).

Pergunta 1 : Considerando que R seja um conjunto e que as afirmações atômicas são sempre verdadeiras ou falsas, como R também pode ser concebido como elemento, diga se a afirmação atômica $R \in R$ é verdadeira ou falsa.

Voltemos ao conjunto vazio, representado simbolicamente por $\{\}$ ou $\emptyset$. Como se trata de um conjunto sem elementos, evidentemente não se pode caracterizá-lo por propriedades de seus elementos. O que caracteriza o conjunto vazio é o fato da afirmação atômica $x \in \emptyset$ ser falsa (para qualquer x) ou a afirmação $x \notin \emptyset$ ser verdadeira (também para todo x). Resumindo:

Definição 20 (O conjuunto vazio) *O conjunto $\emptyset$ é aquele que se caracteriza por ser verdadeira a afirmação $\forall x(x \notin \emptyset)$ ou, equivalentemente, por ser falsa a afirmação $\exists x(x \in \emptyset)$.*

Pergunta 2 : Prove que o conjunto vazio é único, ou seja, que se considerarmos que existam, em principio, dois conjuntos $\emptyset$ e $\tilde{\emptyset}$ que satisfaçam a caracterização dada acima para o conjunto vazio, então teremos necessariamente que $\emptyset = \tilde{\emptyset}$. Não esqueça de utilizar a definição de igualdade entre conjuntos.

Exercício 2 *Com as definições e notações fixadas até aqui, sendo A, B e C conjuntos quaisquer, decida quais das propriedades a seguir são* **válidas**[1]*, quais são* **contingentes**[2] *e quais são* **falsas**.

a) $A \subset A$

b) $A \cap B \subset B$

c) $A \cup B \subset B$

d) $B \subset A \leftrightarrow B \cup A = A$

e) $B \subset A \leftrightarrow B \cap A = A$

f) $(A \cup B) \setminus B = A$

g) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

h) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

i) $A \cap B = \emptyset \leftrightarrow A = B^c$

j) $A \cup (B \setminus B) = A$

k) $A \cap (B \setminus B) = A$

l) $B \setminus A \in \wp(A)$

m) $A \setminus B \in \wp(A)$

n) $\wp(\emptyset) = \emptyset$

o) $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$

p) $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$

q) $A \in \wp(A)$

r) $B \subset (A \setminus B)^c$

s) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

t) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

[1] verdadeiras para todos os conjuntos A, B e C

[2] podendo valer para algum par ou terna de conjuntos A, B e C particular e não valer para outro