

Investigar, ensinar e aprender¹

João Pedro Mendes da Ponte
Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

Tradicionalmente, ensino e investigação são actividades distintas. O que o “investigador” descobre ou inventa, o professor, noutra tempo e noutra contexto, ensina aos seus alunos. Esta separação entre investigar e ensinar tem vindo a ser questionada, do mesmo modo que se tem vindo a pôr em causa a existência de uma separação incontornável entre investigar e aprender. Afinal, quem investiga está a procurar aprender e quem aprende pode ter muito interesse em investigar. Deste modo, parece pertinente visitar os conceitos de investigar, ensinar e aprender e analisar o modo como se podem interligar no processo de ensino-aprendizagem da Matemática e na actividade profissional do professor desta disciplina. É o que procurarei fazer, tendo por base exemplos de actividades e projectos da educação matemática portuguesa.

1. Investigar, ensinar e aprender

Existem muitas perspectivas sobre o que é investigar. Tal como acontece com muitas outras palavras, “investigar” pode assumir múltiplos significados. Na sociedade moderna, constituíram-se poderosas comunidades académicas em muitas áreas do saber, que reivindicam para si um estatuto especial e de algum modo se apropriaram deste termo. Geraram-se então diversos mitos:

- Investigar é uma actividade transcendente, que envolve o uso de metodologias sofisticadas, requerendo recursos especiais e uma longa preparação prévia.
- Investigar é uma actividade reservada a um grupo especial de pessoas, os “investigadores profissionais”.
- Ensinar e investigar são duas actividades contraditórias, que não se conseguem fazer em simultâneo sem comprometer a qualidade de uma ou outra.

¹ *Actas do ProfMat 2003* (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM.

Existe aquilo que podemos chamar a “grande investigação”, que se realiza nas universidades, empresas e laboratórios do Estado e que tem uma certa função social. No entanto, parece-me altamente redutor afirmar que, pelo simples facto dessa investigação existir, ser legítima e ser mais ou menos útil, mais nenhuma investigação pode existir. Na minha perspectiva, “investigar” não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos.

Não vejo como necessariamente contraditórias as actividades de investigar e ensinar. Eu próprio tenho retirado muitos benefícios para a minha actividade de investigação do contacto com os meus alunos, pelo desafio que eles colocam à organização das ideias e pelas perguntas pertinentes que obrigam muitas vezes a repensar os problemas. De modo semelhante, penso que a minha actividade como docente tem beneficiado fortemente do que tenho aprendido como investigador. Aliás, existem exemplos clássicos na história da ciência de influências mútuas entre os papéis de professor e investigador. Um deles, por exemplo, diz respeito a Lobachevsky. Foi o seu trabalho como professor de Geometria que o levou a olhar de modo mais atento para o V Postulado de Euclides e a procurar formas sugestivas de o explicar aos seus alunos. Esse postulado desde há muito incomodava os matemáticos, por diversas razões, e muitos deles interrogavam-se se não seria possível deduzi-lo dos restantes. Foi também isso que tentou fazer Lobachevsky e, quando se convenceu da impossibilidade dessa dedução, resolveu experimentar as consequências de assumir um postulado alternativo, concluindo pela possibilidade da existência de Geometrias não euclidianas. Algo de semelhante aconteceu com o químico Mendeliev, que teve a ideia de construir uma tabela para melhor explicar as propriedades dos elementos então conhecidos aos seus alunos. A tabela periódica viria a ser um dos pilares fundamentais da Química moderna, levando à descoberta de novos elementos e novas propriedades e sugerindo muitas pistas para a compreensão da estrutura da matéria.

Do mesmo modo, existem muitos significados para o termo “aprender” e muitas visões sobre como se aprende. Na visão dos saudosistas da escola do passado, aprender é sobretudo adquirir conhecimentos, quer factuais – sobre os rios, as linhas de caminho de ferro, os reis e as batalhas, as regras gramaticais, etc., – quer processuais – por exemplo, respeitantes ao cálculo numérico e algébrico. Para outros, a aprendizagem é um fenómeno natural, que acontece constantemente no nosso dia-a-dia, uma vez que

todos aprendemos a falar, todos aprendemos as regras básicas do comportamento social, etc. E por aí fora, não faltam as visões redutoras, que salientam um ou outro aspecto desse processo multifacetado e complexo que é aprender, apresentando uma perspectiva parcial e limitada. Para mim, o que está em causa na aprendizagem escolar da Matemática, é o desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando ideias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo.

E, finalmente, existem muitas acepções do que é ensinar e do que é ser professor. Para muitos, será sobretudo o “debitar” da matéria, em frente do quadro ou, de modo mais sofisticado, com retroprojector ou Powerpoint. Nesta perspectiva, ensinar e aprender são independentes – o professor pode ensinar sem que os alunos aprendam. Mas também se pode assumir a perspectiva oposta – se os alunos não aprenderam, é porque o professor não ensinou. Falou, gesticulou, escreveu no quadro, esforçou-se, mas falhou. Se partirmos do princípio que o professor existe para que os alunos aprendam e se estes não aprenderam, então ele não ensinou. Nesta perspectiva, ensinar é algo bastante mais complexo do que apenas transmitir conhecimentos e a função fundamental do professor, por onde é preciso avaliar os resultados do seu trabalho, é a promoção da aprendizagem dos seus alunos.

2. Investigar – em Matemática

Muitos trabalhos têm sido feitos em Portugal dando atenção ao processo de investigação em Matemática. Temos hoje já uma noção bastante clara do papel dos problemas, das diversas fases de um processo típico de investigação, da formulação de questões até à produção, teste e refinamento de conjecturas, e daí às tentativas de prova e ao processo de divulgação de resultados. Temos também uma boa noção do papel dos aspectos conscientes e inconscientes desse processo, da sensibilidade estética e da motivação a partir de analogias físicas. Sabemos, também que existem diferentes estilos cognitivos, ou seja diferentes modos de pensar e de criar em Matemática (Burton, 2001; Hadamard, 1945; Oliveira, 2002; Poincaré, 1996; Ponte, 2001). O que não tem sido tão discutido, a meu ver, é o papel que as actividades de investigação podem ter no

processo de ensino-aprendizagem da Matemática. É este ponto que iremos considerar de seguida.

Diferentes tipos de tarefas

O ensino-aprendizagem da Matemática assenta na actividade que os alunos levam a cabo na sala de aula e esta, por sua vez, depende muito das tarefas apresentadas pelo professor. Todas as matérias escolares têm as suas tarefas características. Por exemplo, na aprendizagem da escrita tínhamos antigamente a cópia, o ditado e a redacção. A Didáctica da Língua mostrou as insuficiências destes tipos de tarefa, e fez surgir outras como o texto orientado e o texto livre.

A Matemática tem também as suas tarefas características. A mais conhecida de todas, é o exercício². Mas há outros tipos de tarefa, como os problemas e as investigações (exemplos na Figura 1). Por vezes também se fala em tarefas de modelação e projectos. É de notar que as características de uma tarefa não são absolutas mas relativas à pessoa que a realiza. Uma mesma questão pode ser para uma pessoa um problema e para outra um exercício, etc.³

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica:		
a) $\frac{6}{12} =$	Qual o mais pequeno número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Encontras alguma regularidade.
b) $\frac{3 \times (10 - 7)}{17 - 2} =$		
c) $\frac{\frac{20}{18 - 9}}{(15 - 10) \times 2} =$ 3		

Figura 1 - Exemplos de tarefas

Na minha perspectiva, uma tarefa tem quatro dimensões básicas: O seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua

² Note-se que não é só em Matemática que se fazem exercícios. Há exercícios um pouco por toda a parte, das línguas à Educação Física, passando pelas ciências como a Física e a Química, e até nas artes performativas como a Música, a Dança e o Teatro...

³ Deve ter-se em atenção que o conceito associado a cada uma destas designações varia por vezes de país para país e até de autor para autor. Usarei aqui o sentido mais corrente no nosso país.

resolução. Conjugando as duas primeiras dimensões, obtemos quatro tipos básicos de tarefa, que podemos visualizar no esquema da Figura 2:

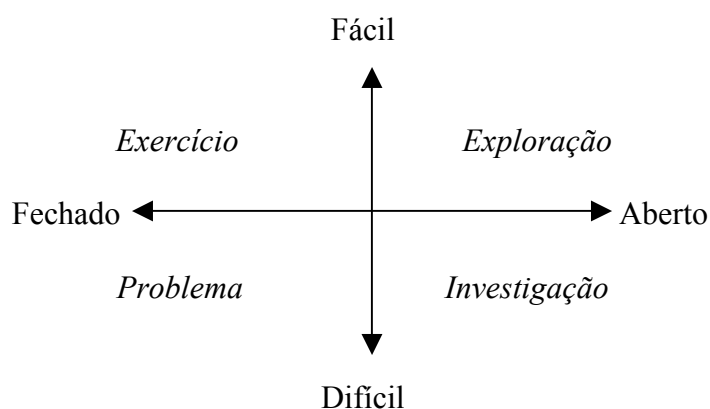


Figura 2 – Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura

Deste modo:

- Os *exercícios* são tarefas sem grande dificuldade e estrutura fechada (2º quadrante);
- Os *problemas* são tarefas também fechada, mas com elevada dificuldade (3º quadrante);
- As *investigações* têm um grau de dificuldade elevado, mas uma estrutura aberta (4º quadrante);
- Finalmente, as *tarefas de exploração* são fáceis e com estrutura aberta (1º quadrante).

Muitas vezes não se distingue entre tarefas de investigação e de exploração, chamando-se “investigações” a todas elas. Isso acontece, muito provavelmente, porque é complicado saber à partida qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos. No entanto, uma vez que atribuímos importância ao grau de dificuldade das tarefas, é preferível termos uma designação para as tarefas abertas mais fáceis e outra designação para as mais difíceis.

Um *projecto*, qualquer que seja a forma que assuma, no fundo não é senão uma tarefa de investigação com um carácter relativamente prolongado. De facto, uma investigação pode demorar mais ou menos tempo. Certas investigações demoram anos e até décadas a concluir (basta pensar em alguns doutoramentos...). Outras demoram um tempo relativamente curto, podendo realizar-se numa aula ou numa curta sequência de

aulas. Um projecto é algo que demora sempre o seu tempo. Ninguém faz um projecto em meia hora... Mas tanto o projecto como a investigação comportam um carácter aberto – uma vez definida a ideia central, a concretização do objectivo requer ainda muito trabalho – e têm um grau de dificuldade considerável na procura da metodologia de trabalho, na superação das dificuldades, na organização do material recolhido, em tirar conclusões, etc. O projecto, de resto, é um excelente exemplo de uma tarefa de longa duração enquanto que as actividades de natureza mais estruturada, por via de regra, são para resolver num prazo relativamente curto. Deste modo, a dimensão tempo ajuda essencialmente a distinguir entre os projectos e os outros tipos de tarefas.

A outra dimensão a que fizemos referência diz respeito ao contexto referencial: a tarefa pode ser contextualizada numa *situação real* ou formulada em termos *puramente matemáticos*. Skovsmose (2000) indica ainda um terceiro tipo de situações, a que chama de “*semi-reais*”: situações que à primeira vista parecem reais, mas que na prática são abstractas, pois nelas não há que atender às propriedades dos objectos excepto aquelas que o contrato didáctico indica serem relevantes para a respectiva resolução. Existem vários tipos de tarefas formuladas em termos de situações reais ou semi-reais que aparecem com frequência no ensino da Matemática: *exercícios* e *problemas de aplicação* e *tarefas de modelação*. Trata-se de tipos particulares de exercícios, problemas e tarefas de exploração e investigação, dependendo do seu grau de dificuldade e da sua estrutura.

As dimensões dificuldade, estrutura, tempo e contexto, são todas elas importantes, sugerindo dimensões em que devem variar as tarefas propostas pelo professor. Procurarei, aqui, fazer ressaltar a importância das explorações e investigações, incluindo, naturalmente, projectos, bem como questões formuladas em termos de situações reais e em termos puramente matemáticos.

Exemplo 1 – Propriedades verdadeiras e falsas

Esta tarefa (Figura 3) foi desenvolvida no *Projecto Matemática para Todos* (MPT)⁴ e o seu uso na sala de aula vem relatado em vários artigos. Reporto-me, aqui, à descrição realizada por Irene Segurado (2002).

⁴ Este projecto decorreu de 1995 a 1999 e a sua actividade está documentada em publicações como Abrantes, Leal e Ponte (1996), Abrantes, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999) e Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998).

1. Repara que $2^2 = 4$ e que $2 \times 2 = 4$.

- Será sempre verdade que $a^n = a \times n$?
- Experimenta nos seguintes casos e noutros por ti escolhidos, usando, se necessário, a calculadora.

$$\begin{array}{cccc} 0^2 = & 0 \times 2 = & 10^2 = & 10 \times 2 = \\ 4^2 = & 4 \times 2 = & \left(\frac{1}{2}\right)^3 = & \left(\frac{1}{2}\right) \times 3 = \\ 3^3 = & 3 \times 3 = & \left(\frac{5}{3}\right)^4 = & \left(\frac{5}{4}\right) \times 4 = \end{array}$$

2. Determina cada uma das seguintes potências

$$\begin{array}{ccc} 10^3 & 1^4 & 0.45^2 \\ 10^5 & 1^8 & 0.45^4 \\ 10^6 & 1^{18} & 0.45^7 \end{array}$$

- Se calculasses 10^7 , seria maior ou menor que 10^6 ?
 - E se calculasses 0.45^9 seria maior ou menor que 0.45^7 ?
 - O que se passa com as potências de base 1?
 - De todo o estudo que fizeste, podes tirar alguma conclusão?
3. Repara que $4^2 = 16$ e $2^4 = 16$. Será sempre verdade que $a^n = n^a$?
- Experimenta noutros casos!
4. Sabendo que $3^6 = 729$, és capaz de calcular imediatamente 3^7 ? e 3^8 ? e 3^{12} ?

Figura 3 - Propriedades verdadeiras e falsas

De acordo com a nossa terminologia, podemos classificar esta tarefa como uma exploração. Um aspecto interessante é que ela está estruturada de modo variável. As duas primeiras questões são relativamente estruturadas e as duas últimas são bastante abertas. No entanto, mesmo as duas primeiras questões não se reduzem a uma usual listagem de exercícios, em que os itens são todos independentes, ou seja, em que uma vez feito um item passa-se ao item seguinte e não se pensa mais no assunto. Embora os itens pareçam fortemente repetitivos, há um raciocínio de segunda ordem que pode ser feito a partir de todos eles e que tem a ver com certas regularidades que será interessante analisar. Por outro lado, as questões mais estruturadas constituem um trabalho de preparação, permitindo aos alunos “ambientar-se” na tarefa e recordar a sua

compreensão dos conceitos fundamentais – neste caso o conceito de potência⁵ –, o que lhes facilita depois a realização de um trabalho produtivo nas questões mais abertas.

Outro aspecto interessante é que as questões propostas têm o mais possível a ver com o programa oficial: potências e operações com potências, ou seja, cálculo aritmético puro e duro. Não estamos num mundo à parte, a usar o nosso preciso tempo com coisas marginais, mas estamos no próprio coração do currículo tradicional. Este exemplo mostra como em tópicos curriculares, onde aparentemente não se pode realizar senão exercícios repetitivos, é possível fazer muito trabalho exploratório e investigativo.

Como Irene explica no seu relato, os alunos (6º ano) começaram a trabalhar em grupos sem dificuldade, e rapidamente se aperceberam que não se pode calcular o valor de uma potência multiplicando a base pelo expoente. A segunda questão também não se revelou difícil e a maior parte dos alunos limitou-se a responder ao que era pedido. Como seria de esperar, foi nas questões 3 e 4 que eles se mostraram mais criativos e empreenderam a exploração de caminhos que iam para além do que era pedido no enunciado.

Na realização destas tarefas na sala de aula, a discussão final é um dos momentos mais importantes para a institucionalização das aprendizagens e até, para a exploração de novos caminhos. Na discussão da questão 2, por exemplo, surgiu uma situação interessante. A professora lembrou-se de colocar um caso diferente dos casos já trabalhados pelos alunos (potências em que a base é um número com parte inteira e parte decimal). Um aluno respondeu rapidamente, com uma resposta errada, mas num tom muito assertivo, de quem está perfeitamente convencido do que está a dizer. A professora identificou esta resposta como uma conjectura, sujeita, naturalmente, a ser testada. Experimentados alguns exemplos, a turma concluiu que se tratava de uma conjectura falsa. Como diz Irene, os alunos perceberam “que, por vezes, o que parece evidente não se revela verdadeiro” (p. 65).

Na questão 3, foram relatadas descobertas interessantes feitas por alguns grupos, como por exemplo:

$$3^8 = 9^4 \qquad 8^6 = 4^9 = 2^{18}$$

Na questão 4, todos os grupos perceberam como funcionava a multiplicação das potências, mas não conseguiram formulá-lo num enunciado sintético. No diálogo com

⁵ Para alguns alunos, pode ser mais que recordar – pode ser desenvolver, no diálogo com os seus colegas de grupo, a sua compreensão desse conceito.

os alunos, a professora não teve dificuldade em levá-los a concluir que o expoente da potência do produto é igual à soma dos expoentes das potências dos factores.

Decisivo para o êxito deste tipo de trabalho, é o modo como o professor responde às dúvidas dos alunos, dando-lhes atenção e encorajamento sem lhes dar directamente a resposta, e o modo como se formulam as questões, envolvendo toda a turma e pondo os alunos a argumentar uns com os outros.

Exemplo 2 – Como é o aluno típico da turma?

Esta tarefa, proposta por Olívia Sousa (2002) a uma turma do 6º ano, teve como ponto de partida o estudo das características do aluno típico da turma, supostamente para explicar a um extra-terrestre (Figura 4).

Supõe que queres comunicar, a um aluno de um país distante, ou mesmo, quem sabe, a um extraterrestre, como são os alunos da tua turma.

1ª etapa: Preparação das questões de investigação

Discute, com os teus colegas, sobre:

1. Que dados (físicos, sociais, culturais...) devem entrar na caracterização do aluno típico?
2. Como pensas que vai ser o perfil do aluno típico da tua turma?
3. Será necessário traçar um perfil para os rapazes e outro para as raparigas? Porquê?

Figura 4 - Como são os alunos da minha turma? (1ª etapa)

O trabalho desenvolveu-se em quatro grandes etapas, cada uma das quais orientada por um conjunto de indicações: (i) Preparação das questões de investigação; (ii) Recolha de dados; (iii) Tratamento dos dados; e (iv) Elaboração de relatórios sobre os resultados.

Como nos relata a professora, dada a forma como o trabalho foi organizado, os alunos não sentiram dificuldade especial em realizar esta investigação. Pelo contrário, colaboraram activamente na formulação de questões. Depois, na recolha de dados, os alunos ultrapassaram todas as expectativas, revelando grande capacidade de organização: enquanto que uns mediam, outros perguntavam, outros observavam e outros registavam dados. O trabalho que realizaram a preparar e apresentar as suas

conclusões ajudou-os a desenvolver competências de comunicação e argumentação e promoveu o seu próprio desenvolvimento pessoal.

No campo dos conhecimentos matemáticos diz Olívia Sousa:

A realização desta tarefa, constituiu uma experiência de aprendizagem significativa, de carácter experimental, onde foram trabalhados de forma integrada conteúdos matemáticos de dois domínios: “Estatística” e “Números e Cálculo”. Os números decimais, obtidos através da medição de grandezas associadas ao seu corpo, deixaram de ser entidades abstractas e ganharam significado. A manipulação destes números em contexto significativo, envolvendo comparação, ordenação, agrupamento e operação, contribuiu para que os alunos melhorassem a sua compreensão global dos números. Quanto aos conteúdos estatísticos, o contacto com diferentes tipos de variáveis e com diversos modos de recolher, organizar e representar informação relevante e significativa, promoveu nos alunos um entendimento e compreensão da linguagem e dos conceitos e métodos estatísticos que ultrapassou a sua memorização. (2002, p. 94)

Este exemplo mostra como uma investigação formulada em termos de questões da realidade dos alunos pode servir como ponto de partida, não só para o desenvolvimento de competências de investigação, mas também para a aprendizagem de novos conceitos matemáticos.

Exemplo 3 – O projecto dos fractais

O projecto dos fractais, descrito no artigo de Manuela Pires (2002), foi proposto por diversas professoras a alunos do 11º ano. A escolha do tema foi feita tendo em conta a sua novidade e actualidade e as ligações que poderia ter com o programa (sucessões). As professoras sentiram necessidade de motivar os alunos, para o que organizaram, elas próprias, uma conferência sobre o tema. Os alunos das diversas turmas organizaram-se em subgrupos que estudaram, cada um, um aspecto particular do tema durante cerca de dois meses. Tiraram fotocópias, fizeram consultas na Internet e pediram esclarecimentos sobre conceitos matemáticos ainda desconhecidos, como números complexos, logaritmos e sucessões. É claro que muitos deles andaram “perdidos” durante algum tempo, mas a pouco e pouco as coisas lá se foram encaminhando.

Segundo a professora, muitos grupos optaram por apresentaram a evolução histórica do conceito ou fazer o estudo matemático de um objecto fractal. Isso ajudou-os a ficar com uma ideia geral sobre o tema e as suas conexões com assuntos que foram

posteriormente tratados na aula. Alguns alunos fizeram trabalhos pouco criativos, envolvendo sobretudo a apresentação de material encontrado em diversas fontes. Outros, fizeram investigações aprofundadas e exploraram conceitos como a dimensão fractal ou temas específicos como a música, a presença na natureza e em construções geométricas a três dimensões. Manuela Pires (2002) faz o seguinte balanço da qualidade geral dos trabalhos:

Apesar da qualidade do produto final apresentar diferenças significativas no conteúdo e na forma, esta tarefa não contribuiu para o aprofundar das diferenças existentes à partida – bem pelo contrário, todos os alunos, sem excepção, realizaram o projecto com uma qualidade aceitável (p. 148)

E acrescenta, no que se refere às aprendizagens dos alunos:

Ao olhar para o conjunto dos produtos finais em termos de trabalho escrito e de materiais, para a dinâmica produzida nas aulas pelas apresentações orais, bem como para os temas tratados, muitas vezes de uma forma bastante aprofundada e integrada, pode afirmar-se que o contributo para o desenvolvimento das capacidades, atitudes e conhecimentos foi marcante (...) Os alunos desenvolveram tanto a capacidade de pesquisar, seleccionar e organizar, como a criatividade, o espírito crítico e a comunicação. Desenvolveram ainda a iniciativa, a responsabilidade e a persistência. (p. 151)

Na sua perspectiva, o projecto desempenha um papel único no currículo, pelo “grau de liberdade e autonomia que naturalmente se associam ao seu carácter prolongado e faseado” (p. 151).

O papel das tarefas de exploração e investigação

Uma preocupação fundamental que se destaca nos exemplos anteriores é a de dar ao aluno a responsabilidade de descobrir e de justificar as suas descobertas. Como diz Leone Burton (1984) ao sintetizar as orientações de um projecto que dirigiu, centrado na resolução de problemas e na realização de investigações matemáticas:

Foi pedido [aos professores] que mudassem o seu papel de responsáveis pelo que os alunos fazem e aprendem para o papel de recurso dos alunos. Os professores foram encorajados a não fornecer as respostas ou os métodos mas sim a provocar os seus alunos a procurá-las por si próprios. A noção de responsabilidade era uma noção-chave – os alunos tomando responsabilidade pela sua escolha dos problemas, dos seus colegas de

trabalho e o seu método de ataque, pelo seu pensamento e pelos seus resultados. (p. 1)

Se se pretende que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas e assumam uma visão alargada da natureza desta ciência, então as tarefas de exploração e investigação têm de ter um papel importante na sala de aula. O interesse destas tarefas é por vezes desvalorizado com diversos argumentos: (i) a maior parte dos alunos não tem qualquer interesse por realizar explorações ou investigações matemáticas; (ii) os alunos têm dificuldade em perceber como investigar; (iii) antes de poderem investigar os alunos têm de aprender muitos conceitos e procedimentos básicos; e (iv) a actividade do aluno e a do matemático são necessariamente muito diferentes, porque não se pode comparar um profissional especializado, que trabalha em coisas que lhe interessam, com uma criança ou um jovem, que tem uma dúzia de disciplinas para estudar, e que o faz coagido pelo sistema de ensino. Não é difícil responder a estes argumentos:

(i) É verdade que muitos alunos, infelizmente, não têm qualquer interesse pelas investigações matemáticas, ou porque não têm interesse pela escola, ou porque têm esse interesse canalizado para outros objectivos – por exemplo, fazer exercícios em série como preparação para o exame. No entanto, por mais modesto que seja, há sempre algo que o professor pode fazer para captar a sua atenção: uma pergunta, uma observação, um desafio. Não assumir, é dizer que há alunos que são incapazes de aprender, é negar a função do professor.

(ii) Os alunos à partida não sabem o que é uma investigação. Mas, como é evidente, podem aprender. Na verdade, os alunos podem precisar de várias experiências em trabalho investigativo para perceberem, de modo apropriado, o que é este trabalho. A função do professor é ensinar, não é reclamar que os alunos não sabem.

(iii) Saber conceitos e procedimentos básicos é claro que ajuda na realização de investigações, como em todo o trabalho intelectual. Mas muitas coisas aprendem-se melhor em actividades significativas, lutando com dificuldades concretas, do que de uma forma dedutiva e linear. Muitos conceitos e procedimentos podem ser aprendidos através de actividades exploratórias e investigativas. Por isso, não tem de ser “primeiro coisa e depois a outra”. Pode ser, “umas vezes primeiro uma coisa, outras vezes primeiro a outra”, ou ainda, por vezes, “as duas ao mesmo tempo”.

(iv) Que o matemático e o aluno são personagens diferentes, não há grande dúvida. Mas a sua actividade pode ter muitos pontos de contacto. São vários os matemáticos que o dizem, como o francês Jacques Hadamard (1945):

Entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema de geometria ou de álgebra e o trabalho de criação, pode dizer-se que existe apenas uma diferença de grau, uma diferença de nível, tendo ambos os trabalhos uma natureza semelhante. (p. 104)

3. Investigar – na prática profissional do professor

Mostrei alguns acontecimentos que ocorreram na sala de aula durante a realização de diversas tarefas. Estes exemplos foram retirados do livro *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (GTI, 2002), cuja ideia central é que os professores – como de resto os profissionais de outros domínios – podem ter interesse em investigar os problemas que se colocam na sua própria prática.

Aprendizagens profissionais nas diversas experiências

Irene Segurado (2002) realizou a sua investigação na sala de aula, assumindo os papéis de professora e investigadora. Ao mesmo tempo que assegurava a condução das aulas ia recolhendo dados. Não esteve, porém, sozinha nesta actividade, contando na rectaguarda com o suporte de um dos grupos de trabalho do Projecto MPT.

Como relata no seu artigo, realizou várias aprendizagens ao longo deste processo. No que respeita à capacidade de investigar dos seus alunos, notou uma evolução significativa no seu desempenho. Enquanto que, no início, os alunos mostravam uma grande dependência da professora, no final, mostravam-se já bastante independentes. Os alunos evoluíram também no modo de trabalhar nas tarefas. A princípio, limitavam-se a responder às perguntas formuladas, mas, progressivamente, começaram a manifestar o seu poder criativo, formulando novas questões e evidenciando o seu entusiasmo. Na perspectiva da professora, com o decorrer do trabalho, os alunos desenvolveram a sua capacidade de realizar investigações matemáticas, bem como a sua capacidade comunicar e argumentar matematicamente. No que respeita aos conhecimentos e competências matemáticas, notou que os alunos se revelaram capazes de usar conceitos como potências, fracções, dízimas, números

primos, divisores e múltiplos. Estes conceitos tomaram para eles um novo valor quando se tornaram úteis na realização desta investigação.

Irene destaca particularmente a nova visão que desenvolveu acerca de alguns dos alunos:

Há ainda a referir o empenho com que alguns alunos tidos por mais fracos se envolveram neste tipo de tarefas. O facto de lhes ter sido permitido observar e descobrir relações entre os números, sem que para isso necessitassem de uma grande “bagagem matemática”, deu-lhes alguma segurança. Tanto eu como eles próprios ficámos agradavelmente surpreendidos com o seu desempenho neste tipo de tarefa. (p. 72)

Outro dos trabalhos a que fiz referência, foi realizado por Olívia Sousa (2002). No ano em que fez esta experiência, esta professora não tinha alunos a seu cargo e trabalhou em par pedagógico com Irene. A responsabilidade pelas aulas e pela recolha de dados foi partilhada pelas duas.

No seu balanço desta investigação, Olívia aponta vantagens para o funcionamento em par pedagógico tanto para os alunos como para as professoras. Na sua perspectiva, os alunos tiveram mais e melhor apoio, sendo menor o tempo que tiveram de esperar para verem as suas dúvidas esclarecidas, com consequências positivas na qualidade e no ritmo do seu trabalho. Além disso, beneficiaram com o facto das professoras poderem passar mais tempo com cada grupo, questionando os alunos e orientando-os na procura de soluções.

No que respeita às professoras, para Olívia,

Este modo de funcionar permitiu tirar partido das potencialidades do trabalho colaborativo, tanto na preparação como na concretização desta experiência. Em termos de preparação, permitiu antever uma maior quantidade e diversidade de ocorrências e reflectir sobre modos de as resolver, minimizando assim o número de situações imprevistas e a tomada de decisões em cima do acontecimento. A reflexão conjunta, no final de cada aula, sobre os seus aspectos positivos e negativos, proporcionou uma melhor compreensão do modo como os alunos viveram a experiência e permitiu o ajustamento e adaptação dos planos da aula seguinte sempre que foi necessário. (pp. 93-94)

Olívia Sousa aponta ainda que o trabalho em colaboração com Irene foi também vantajoso para a investigação, por minimizar a interferência provocada pela presença de

um elemento estranho na sala de aula, por proporcionar uma recolha de dados mais completa e consistente e por possibilitar um contacto mais estreito com os alunos.

Esta professora estabelece mesmo um paralelismo entre a sua experiência e a dos alunos:

Enquanto redigia as minhas notas de campo, fui surpreendida por uma ideia que me ocorreu: a existência de uma forte analogia entre o modo como os alunos tinham desenvolvido a sua investigação e o modo como eu estava a desenvolver a minha própria investigação. Tal como os alunos, também eu senti imensa dificuldade em formular as minhas questões de investigação, necessitando de pedir ajuda para o fazer, do mesmo modo que eles solicitaram a minha (...) Outro aspecto onde senti o paralelismo entre as duas situações, foi na dificuldade de comunicar por escrito as minhas ideias e conclusões. Também os alunos sentiram dificuldade na escrita das suas questões de investigação, bem como na elaboração do relatório final e da carta para o ET. Para além dos processos, esta analogia estende-se também aos resultados. Penso que posso inferir que, tal como eu, também os alunos sofreram um processo evolutivo enquanto investigaram. Não pretendo dizer que se tornaram investigadores, tal como eu não me tornei, mas penso que este tipo de experiências pode contribuir para que os alunos se tornem mais reflexivos e mais competentes na procura de soluções para os seus problemas, quer enquanto estudantes quer, mais tarde, como cidadãos. (p. 96).

Finalmente, outro estudo a que fiz referência foi realizado por Manuela Pires (2002). Neste caso, o trabalho foi feito por uma equipa colaborativa de cinco professoras – ela própria e quatro professoras da escola que naquele ano lectivo leccionavam turmas do 11º ano. Funcionaram, portanto, como subgrupo disciplinar sectorial. A concepção geral do trabalho foi feita essencialmente por Manuela e o desenvolvimento concreto das actividades com os alunos e a reflexão sobre o que se ia passando foi assegurada pelo grupo de professoras numa reunião semanal. Os dados foram recolhidos por todas as professoras do grupo, tendo a respectiva análise sido feita essencialmente por Manuela. Embora com níveis de responsabilidade diferentes, todas as participantes assumiram os papéis de professoras e investigadoras.

As professoras, apesar de se conhecerem há bastante tempo e de terem feito alguns projectos em conjunto, nunca tinham realizado um trabalho tão prolongado nem tão aprofundado. Constataram que o seu conhecimento e a sua visão dos diferentes tipos de tarefa era bastante diferente, tendo aprendido muito umas com as outras. Verificaram, por exemplo, que nem sempre são muito nítidas as fronteiras entre os

vários tipos de tarefa e que o modo como estas são exploradas na sala de aula é extremamente importante. Apontam ainda que

De um modo geral, ficou a ideia que, para a aprendizagem ser profunda, é necessário propor aos alunos de forma equilibrada tarefas cujas características se complementem. Isso possibilitará a mobilização das suas capacidades de ordem superior e uma aprendizagem mais rica e estimulante. Se não o fizermos não serão desenvolvidas competências importantes. (p. 153)

No seu artigo, Manuela Pires sublinha que os conceitos e ferramentas já trabalhados pelos alunos têm de ser novamente experimentados, de preferência em novos contextos. Aponta que isso é importante para que eles adquiram uma melhor compreensão desses conceitos e da forma como podem ser usados. Conclui com uma ideia-chave: “Para todos é necessário propor tarefas desafiantes, ao mesmo tempo que se dá tempo para consolidar conhecimentos” (p. 153).

Os artigos a que tenho vindo a fazer referência foram desenvolvidos no quadro do grupo de estudos do GTI “O professor como investigador”. Este grupo, em Outubro de 2001, decidiu empreender a elaboração de um livro, com artigos originais, uns de natureza teórica, outros relatando estudos centrados na prática profissional dos respectivos autores. O próprio grupo de estudos é um bom exemplo do que pode fazer um grupo de trabalho colaborativo. Nas reuniões foram discutidas as propostas de artigo e as suas diversas versões, sendo dadas sugestões para o seu aperfeiçoamento. Combinando a interacção presencial com a interacção a distância, via *e-mail*, e articulando as reuniões com outras formas de trabalho, os artigos foram sendo sucessivamente aperfeiçoados até assumirem a forma definitiva.

As experiências como projectos de investigação sobre a sua própria prática

Por esse mundo fora, são cada vez mais os professores que investigam. Alguns fazem-no inseridos em programas de mestrado e doutoramento, outros fazem-no no quadro de projectos inseridos nas suas escolas. No entanto, a investigação sobre a sua própria prática não diz apenas respeito a professores. Trata-se de uma actividade que interessa igualmente a técnicos de orientação escolar, psicólogos, técnicos da administração educativa, formadores de professores e professores do ensino superior. Assistimos hoje em muitos países ao desenvolvimento de um movimento cada vez mais

alargado de profissionais da educação e de outras áreas como a saúde e o serviço social que procuram investigar problemas relacionados com a sua própria prática.

Isso acontece porque estes profissionais defrontam-se na sua actividade com muitos problemas de grande complexidade. Em vez de esperar por soluções vindas do exterior, eles têm vindo cada vez mais a investigar directamente esses problemas. Tal investigação, para além de poder ajudar ao esclarecimento e resolução desses problemas, contribui igualmente para o desenvolvimento profissional dos participantes e para o aperfeiçoamento das respectivas organizações. Esta investigação pode, além do mais, contribuir para o desenvolvimento do conhecimento e da cultura profissional nesse campo de prática. Em certos casos, tal investigação pode mesmo trazer novos elementos para o conhecimento e a cultura geral da sociedade.

Os professores envolvidos nas investigações acima indicadas desenvolveram-se profissionalmente. Para isso, foram importantes não só as investigações em si como o trabalho de divulgação das suas experiências, através da elaboração dos artigos, o que permitiu um olhar mais aprofundado sobre as mesmas. Foi ainda importante, em alguns casos, a apresentação oral das experiências em conferências e comunicações em encontros e congressos.

Já acima referi alguns dos aspectos que constituem contributos destas experiências em termos de conhecimento. A novidade será maior nuns casos do que noutros, mas tomado no seu conjunto, o trabalho realizado (sistematizado no livro) constitui, sem dúvida, uma importante mais valia para a educação matemática portuguesa, mostrando caminhos que pode seguir a mudança curricular e a renovação das práticas profissionais.

O papel da colaboração

No trabalho do GTI, a noção de colaboração⁶, assume um papel fundamental. Diversas investigações envolvem formas diversificadas de colaboração, como indiquei a propósito dos artigos de Irene, Olívia e Manuela. A colaboração foi também uma ideia fundamental no trabalho realizado por todo o grupo e que levou à escrita e aperfeiçoamento dos artigos.

Na verdade, a colaboração, permitindo conjugar os esforços de diversas pessoas, constitui uma estratégia de grande valor para enfrentar os problemas da prática

⁶ De resto discutida com alguma profundidade no próprio livro – ver o artigo de Boavida e Ponte (2002).

profissional. Várias pessoas a trabalhar em conjunto têm mais ideias, mais energia e mais força para derrubar obstáculos do que uma pessoa trabalhando sozinha e, além disso, podem capitalizar nas competências individuais. Para isso, têm, é claro, que se adaptar uns aos outros, criando um sistema eficiente de trabalho conjunto.

A colaboração pode ocorrer entre professores, ajudando a caracterizar os problemas com que eles se defrontam, definir estratégias de actuação, avaliar resultados da acção, criando um ambiente de trabalho conjunto positivo e estimulante. Quando um dos membros do grupo está num momento menos bom, recebe o apoio dos outros membros. Quando um membro está mais inspirado, contagia todo o grupo.

A colaboração pode também envolver actores educativos diversos, como educadores matemáticos, matemáticos, psicólogos, sociólogos, animadores culturais, encarregados de educação, etc. No caso do grupo de estudos do GTI, trabalharam em conjunto professores de diferentes níveis de ensino – do 1º, 2º e 3º ciclos do ensino básico, do ensino secundário, de escolas superiores de educação e de universidades. Um grupo mais diversificado tem maior dificuldade em funcionar, pois os participantes têm muitas vezes estatutos, valores e linguagens diferentes e estes nem sempre se conseguem harmonizar facilmente. No entanto, a diversidade pode ser profundamente enriquecedora. Um grupo heterogéneo é um grupo com uma capacidade de acção acrescida, dada a variedade de competências dos seus membros. Na verdade, um trabalho como o do grupo de estudos do GTI, integrando ensaios teóricos e experiências concretas de investigação sobre a prática profissional, dificilmente poderia ter sido feito sem esta diversidade de participantes.

4. A investigação como um elemento da cultura profissional

A valorização de uma cultura de investigação entre os professores não depende apenas de uma actuação mais ou menos voluntarista no plano individual. Pressupõe, pelo contrário, um papel fundamental das instâncias colectivas onde os professores exercem a sua actividade profissional, com destaque para as escolas, os movimentos pedagógicos e as estruturas associativas.

Um dos maiores obstáculos à afirmação de uma cultura de investigação nos professores é a velha oposição entre teoria e prática. Nesta oposição, a teoria é algo fantasioso, inadequado para a interpretação da realidade, inútil ou até pernicioso. A prática é o reino da normalidade e do inevitável, onde todos os problemas encontram

sempre justificação externa (sejam os alunos, os encarregados de educação, os explicadores, a falta de condições de trabalho ou a política do Ministério). Trata-se de uma concepção bizarra de teoria e prática. Na verdade, teoria e prática são duas faces de uma mesma moeda. Coexistem sempre. Onde há uma teoria há uma prática e onde há uma prática há uma teoria. O que é preciso é questionar se a teoria serve ou não serve e se a prática é recomendável ou problemática. Há muitas teorias que não prestam, mas há outras boas. Também há muitas práticas inadequadas, ao lado de outras exemplares. Pôr em diálogo, em cada situação, a teoria e a prática, é uma condição fundamental para a compreensão dos problemas e um passo essencial para a sua resolução. Isso consegue-se muito melhor no plano colectivo do que no plano individual, e aí está mais uma razão para chamar a atenção para o nível colectivo de actuação profissional do professor.

Na minha perspectiva, a afirmação da investigação e da reflexão sobre a prática como um elemento fundamental da cultura profissional dos professores de Matemática depende de duas instâncias fundamentais:

- (i) Uma instância de apoio à realização de projectos, que se devem realizar tanto quanto possível próximos da prática profissional, ou seja nas escolas, em grupos de escolas ou em grupos com interesses comuns, e que, em muitos casos, podem revestir o carácter de projectos colaborativos, envolvendo professores experientes, professores principiantes, formadores e investigadores e outros membros da comunidade, como agentes sociais e culturais e até encarregados de educação;
- (ii) Uma instância de apoio à divulgação dos resultados e das perspectivas dos projectos e ao seu debate, que são, de modo privilegiado, os encontros profissionais e as publicações periódicas e não periódicas.

Não teremos em Portugal as condições mais desejáveis em relação à primeira instância, mas devemos reconhecer que começam a haver espaços de trabalho nas escolas, horários que permitem trabalhar, recursos e condições mínimas propiciadoras de colaboração. As condições não são um dado absoluto – são algo que se transforma, com paciência, persistência e criatividade.

Por outro lado, temos condições excepcionais no que se refere à segunda instância – com os encontros nacionais, regionais e sectoriais da APM, os seus grupos de trabalho e núcleos regionais e as revistas *Educação e Matemática* e *Quadrante*, uma

mais virada para a divulgação e troca de experiências, outra para a apresentação de perspectivas teóricas e trabalhos empíricos. No entanto, penso que ainda há muito a fazer para se potenciar estas condições como elemento gerador de uma nova cultura profissional marcada pela discussão, pela crítica, pelo debate aprofundados, e onde se privilegie o essencial sobre o acessório.

Na verdade, muitos passos têm ainda de ser dados para que se afirme uma verdadeira cultura de investigação. Esta cultura, na minha perspectiva, não deve encarar-se como uma mera transposição do que se passa noutras comunidades académicas (como os matemáticos ou os educadores matemáticos) ou profissionais (como os médicos ou os engenheiros). Tem de equacionar-se no quadro da afirmação de uma nova profissionalidade docente.

Debate-se hoje muito se o professor é um autêntico profissional ou é antes um semi-profissional. É claro que o professor que cumpre o seu horário, dá as suas aulas, assiste a contrariado às reuniões de grupo e conselhos de turma e foge da escola assim que possível, está mais perto da imagem do funcionário público do que da imagem do profissional. Além disso, a docência está muito longe de poder constituir uma profissão liberal, no sentido clássico do termo. Ao contrário do profissional liberal, que trabalha por conta própria, o vínculo contratual do professor é com o Estado ou com outra entidade patronal. O seu “cliente” é difícil de caracterizar. À primeira vista seria o aluno, mas o professor não trabalha só para o aluno – trabalha também para a família e para a comunidade, a quem tem de prestar contas⁷.

Deste modo, o que se requer não é a implementação do modelo das profissões liberais, mas a afirmação de uma nova profissionalidade. A profissão docente, apesar de bastante antiga, continua em construção (Perrenoud, 1993). É preciso voltar a perguntar, portanto, o que é o professor? A este respeito, partilho a perspectiva que o professor é tanto o representante da sociedade junto da criança e do jovem como um co-construtor dessa sociedade com as crianças, os jovens, os seus pares e toda a comunidade. O professor é um homem ou mulher de acção e também um homem ou mulher de cultura e o seu trabalho envolve uma faceta de executor e outra de pensador (Alarcão, 1997). Esta nova profissionalidade, a meu ver, terá de passar por dois elementos essenciais, de resto sublinhados por Isabel Alarcão (1997): (i) a consciencialização, pelos professores, da especificidade do seu conhecimento profissional; (ii) a afirmação de uma ética

⁷ Note-se, ainda, que, ao contrário do que acontece com as profissões liberais clássicas, os “clientes” da escola pública (aluno, família e comunidade) não têm qualquer margem para escolher o seu professor.

renovada, em que o professor deixa de se assumir como um agente cultural e político do Estado para ser um agente cultural e político da sociedade.

5. A concluir

Procurando defender a ideia que pode haver uma ligação estreita entre ensinar, aprender e investigar, apresentei diversas situações em que os alunos fizeram explorações e investigações matemáticas na sala de aula. Referi, também, diversas experiências em que os professores investigaram a sua própria prática e sublinhei a importância da dimensão colaborativa. Indiquei, finalmente, o papel da dimensão institucional e associativa para o desenvolvimento de uma nova cultura profissional, onde a investigação tenha um papel relevante. Baseei a minha argumentação numa perspectiva dessacralizada da investigação, como uma actividade natural à espécie humana, em contraponto com uma perspectiva elitista e restritiva, que reserva esta actividade para os “investigadores profissionais”.

No entanto, antes de concluir, parece-me ser necessário sublinhar que, apesar de defender uma perspectiva alargada da investigação, isso não significa que subscreva a banalização deste conceito. A investigação requer uma racionalidade muito diferente da simples opinião. Pressupõe, da parte de quem a realiza, um esforço de clareza nos conceitos, nos raciocínios e nos procedimentos. Pressupõe reflexão, debate e crítica aprofundada pela comunidade dos pares. Isso requer, naturalmente, que as ideias sejam apresentadas de forma suficientemente detalhada e rigorosa para poderem ser compreendidas e debatidas. Exige uma racionalidade argumentativa mais sólida do que a simples justificação *ad hoc* e exige que se saiba qual o paradigma ou enquadramento teórico geral por onde essa racionalidade pode ser aferida.

Investigar não resulta de se conhecer a aplicar umas tantas técnicas de recolha de dados, sejam questionários ou entrevistas, e de fazer uma análise estatística ou de conteúdo. Pelo contrário, investigar pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo. Investigar envolve sobretudo três actividades: estudar, conversar e escrever. Estudar – autores clássicos e autores modernos, autores da nossa área e autores que nos são exteriores, é fundamental para nos abirmos para o mundo, para acompanharmos o movimento intelectual contemporâneo, ao mesmo tempo que preservamos a essencial da nossa herança

cultural. Conversar – com colegas, com outros actores educativos, com os nossos alunos, trocando impressões, colaborando, procurando compreender os seus pontos de vista e formulando a nossa perspectiva cada vez com mais clareza. Escrever – pondo preto no branco as nossas ideias, as nossas experiências, as nossas práticas, os nossos desejos e frustrações, permitindo que elas sejam conhecidas e discutidas dentro e fora da comunidade profissional. Só desse modo podemos chegar ao fundo das coisas, só desse modo podemos construir uma cultura marcada pelo profissionalismo e pelo rigor.

Algo de muito semelhante parece-me ser o que defende António Nóvoa:

É preciso ir além dos “discursos de superfície” e procurar uma compreensão mais profunda dos fenómenos educativos. Estudar. Conhecer. Investigar. Avaliar. Caso contrário, continuaremos reféns da demagogia e da ignorância. As mudanças nas escolas estão, por vezes, tão próximas que provocam um efeito de cegueira. Só conseguiremos sair da penumbra através de uma reflexão colectiva, informada e crítica. (Nóvoa, 2002, p. 29)

A investigação não é certamente a solução geral que vai resolver de uma vez por todas todos os problemas da educação. Se alguma coisa sabemos com alguma margem de certeza é que tal solução não existe. A investigação tem as suas potencialidade mas também tem os seus limites. Mesmo no ensino, é útil para atingir certos objectivos, mas não o será para outros. Nem tudo se pode aprender através da investigação. No entanto, isso não invalida a ideia que se trata de uma poderosa forma de construção do conhecimento tanto para o aluno como para o professor, que importa, por isso, promover no nosso ensino e na nossa cultura profissional.

6. Referências

- Abrantes, P., Leal, L. C., & Ponte, J. P. (Eds.). (1996). *Investigar para aprender matemática*. Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (Eds.). (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Alarcão, I. (1997). Profissionalização docente em construção. In S. Pimenta (Ed.), *Didáctica e formação de professores: Percursos e perspectivas no Brasil e em Portugal*. São Paulo: Cortez.
- Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

- Burton, L. (1984). *Thinking things through: Problem solving in mathematics*. London: Simon & Schuster.
- Burton, L. (2001). Research mathematicians as learners – and what mathematics education can learn from them. *British Educational Research Journal*, 27(5), 589-599.
- GTI (Ed.). (2002). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM.
- Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press.
- Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Nóvoa, A. (2002). Os professores e o “novo” espaço público da educação. In A. Nóvoa (Ed.), *Formação de professores e trabalho pedagógico* (pp. 9-29). Lisboa: Educa.
- Perrenoud, P. (1993). *Práticas pedagógicas, profissão docente e formação: Perspectivas sociológicas*. Lisboa: D. Quixote.
- Pires, M. (2002). A diversificação de tarefas em Matemática no ensino secundário: Um projecto de investigação-acção. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 125-154). Lisboa: APM.
- Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Ponte, J. P. (2001). *A comunidade matemática e as suas práticas de investigação*. Documento do círculo de estudos “Aprender Matemática Investigando”, Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/mem/bibliografia.htm>.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.
- Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 57-73). Lisboa: APM.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.
- Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6º ano. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: APM.