Terceira Avaliação de MAT0315 - Introdução à Análise
Prof. David Pires Dias - 22 / 10 / 12

Nome: **Assinatura:**

1. Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, defina precisamente o que significa dizer que a série converge.

(1.0 a questão)

2. Utilizando a definição acima dê um exemplo de uma série que converge (mostrando a convergência através da definição) e um exemplo de uma série que não converge (novamente através da definição).

(1.5 a questão)

3. Prove (utilizando a definição do primeiro exercício) que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(1.0 a questão)

4. Diga se as séries abaixo são absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes, ou divergentes. Justifique sua resposta com o critério que julgar necessário.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$

   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{logn}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-(-3)^n}{(3n)!-(2n)!}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{12} e^{-n}$

(1.0 cada item)

5. Este exercício é uma demonstração por itens de que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n \geqslant 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge. Para isso, pede-se:

   a) Mostre que $\frac{a_n}{1+a_n} \leqslant a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Utilizando o fato de que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos $\frac{a_n}{a_n+1} \geqslant \frac{a_n}{2}$.

   c) Utilize o primeiro item para mostrar que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge e o segundo para provar que se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

(1.0 cada item)