Lista de Exercícios IV - MAT0315 - Introdução à Análise
Prof. David Pires Dias - 2012

Limite e continuidade de funções

1. Refaça as demonstrações sobre limites, como as dos teoremas 1, 3, 4, 5 e 7 e seus corolários, do capítulo VI do livro [EL1] e depois, se pertinente, reinterprete-as para limites laterais, limites infinitos e limites no infinito. Observe também a demonstração do teorema 11 deste mesmo capítulo.

2. Calcule os limites abaixo utilizando o rigor necessário (dado pela definição).

   (a) $\lim_{x\to 2} (5x-3)$ (c) $\lim_{x\to 4} (x^2-6)$ (e) $\lim_{x\to e} ln(x)$ (g) $\lim_{x\to 3} \sqrt{x-4}$

   (b) $\lim_{x\to 1} (x-1)^2$ (d) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+6}$ (f) $\lim_{x\to 0} e^x$ (h) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$

3. Calcule os limites abaixo:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ (e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x)}{x}$ (i) $\lim_{x\to 0^-} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (m) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)$

   (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ (f) $\lim_{x\to 0^-} \frac{sen(x)}{x}$ (j) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^x}$ (n) $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right)$

   (c) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ (g) $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (k) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1+e^x}$ (o) $\lim_{x\to\infty} e^x$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$ (h) $\lim_{x\to 0^+} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (l) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)$ (p) $\lim_{x\to -\infty} e^x$

4. Encontre exemplos de funções com a seguintes propriedades (caso estas existam):

   (a) Limitada e convergente para $x \to \infty$.
   (b) Limitada e não convergente para $x \to \infty$.
   (c) Estritamente crescente e que não seja crescente.
   (d) Estritamente decrescente e que não seja decrescente.
   (e) Crescente e que não seja estritamente crescente.
   (f) Decrescente e que não seja estritamente decrescente.
   (g) Que seja crescente e decrescente ao mesmo tempo.
   (h) Que seja estritamente crescente e estritamente decrescente ao mesmo tempo.
   (i) Monótona e limitada que não converge para $x \to \infty$.
   (j) Monótona e limitada que converge para $x \to \infty$.

5. Sejam f e g duas funções com $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, lembrando que $a \in Dom'_f \cap Dom'_g$. Encontre exemplos de funções f e g deste tipo que satisfaçam as condições dadas nos itens abaixo:

   (a) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. (f) $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \infty$.

   (b) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. (g) $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = -\infty$.

   (c) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. (h) $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = 0$.

   (d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 5$. (i) $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = 1$.

   (e) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$, para $\alpha \in \mathbb{R}_+$. (j) $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \alpha$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Observação: O número a neste exercício pode ser qualquer $a \in \mathbb{R}$. Mas pode-se pensar também em exemplos com limites em que x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

6. Sabendo que o dom´pinio de todas as funções abaixo é $I\!R$ encontre o conjunto dos pontos em que tais funções são contínuas (justifique):

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} xsen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} x^2sen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

7. No exercício anterior, para as funções que não são contínuas em algum ponto, diga qual é a espécie de descontinuidade de tal função nesse ponto.

8. Resolva os exercícios 1, 2, 4, 5, 12 e 13 do capítulo VI do livro [EL1].

9. Resolva os exercícios 3, 10 e 12 do capítulo IV (página 89) do livro [GA1].

10. Refaça algumas demonstrações, como as dos teoremas 2, 3, 5, 12, 14 e 17 e seus corolários, do capítulo VII do livro [EL1].

11. Resolva os exercícios 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 18 do capítulo V (páginas 113 e 114) do livro [GA1].

12. Resolva os exercícios 1, 4, 6, 9 e 10 do capítulo V (páginas 118 e 119) do livro [GA1].

13. Resolva os exercícios 6, 12, 23, 28, 29 e 37 do capítulo VII do livro [EL1].

Referências

[EL1] Lima, E. L. - Curso de Análise vol. 1, 12ed. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2006.

[GA1] Ávila, G. S. S. - Introdução à Análise Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blcher, 2000.