Lista de Exercícios I - MAT0315 - Introdução à Análise
Prof. David Pires Dias - 2012

Conjuntos finitos e infinitos, enumeráveis e não-enumeráveis, corpos e corpos ordenados

1. Encontre uma bijeção entre os conjuntos, se for possível:

   (a) $I\!N$ e $Z\!\!Z$

   (b) $I\!R$ e $\mathbb{Q}$

   (c) $I\!R$ e $]0,1[$

   (d) $I\!N \times I\!N$ e $Z\!\!Z$

   (e) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e $I\!N$

   (f) $I\!R \times \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$

   (g) $I\!N$ e $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

   (h) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{1, 2\}$

   (i) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\emptyset$

   (j) $I\!R$ e $]a, b[$

   (k) $I\!N$ e $\mathbb{P}$ (Conj. dos pares positivos.)

2. Pense nos exercícios 9, 10, 11, 19 e 21 do capítulo II do livro [EL1].

3. Demonstre que um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção entre X e uma parte própria de X (esta também pode ser uma definição para conjuntos infinitos).

4. Defina com suas próprias palavras o que é um conjunto enumerável e um não-enumerável. Encontre alguns exemplos de tais conjuntos justificando rigorosamente suas respostas.

5. Prove que $\sqrt{2}$ não é um número racional, em seguida, prove que $\sqrt{p}$, para p um número primo, também não é racional.

6. Prove que $\sqrt[3]{5^2}$ não é um número racional.

7. Dado um corpo ordenado K, defina precisamente a completude de K (em outras palavras, defina o que quer dizer K completo).

8. Utilizando a definição acima, prove que $\mathbb{Q}$ não é um conjunto completo.

9. Demonstre que apesar de $\mathbb{C}$ ser corpo, este não é um corpo ordenado.

10. Mostre que $\mathbb{I} = I\!R - \mathbb{Q}$, conjunto dos números irracionais, não é um corpo.

11. Resolva os exerccios 1, 4, 5, 10, 16, 27, 28, 29, 30, 32 e 33 do capítulo III do livro [EL1].

12. Pense no exercícios 2, 3, 8, 11, 12, 14, 48, 50 e 57 do captulo III do livro [EL1].

13. Prove que se um subconjunto A, de um corpo ordenado K, possui mínimo, então este também é o ínfimo de A. Dê um exemplo de que a recíproca não vale.

14. Demonstre que num corpo ordenado K, temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = z = 0.$$

Referências

[EL1] Lima, E. L. - Curso de Análise vol. 1, 12ed. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2006.

[GA1] Ávila, G. S. S. - Introdução à Análise Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blcher, 2000.