Lista Preliminar de Exercícios - MAT0315 - Introdução à Análise
Prof. David Pires Dias - 2012

Conjuntos, famílias e funções

1. Sejam $f : A \to B$ uma função, X e Y dois subconjuntos quaisquer de A. Demosntre que $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. Encontre um exemplo em que $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ não é válida. Demonstre que esta igualdade é verdadeira sempre que a função f é injetora.

2. Exercícios similares ao anterior podem ser vistos no capítulo I (exercícios 12, 13, 14, 15, 16 e 17) do livro [EL1].

3. Demonstre que a composta de duas bijeções também é uma bijeção.

4. Demonstre que uma função possui inversa se, e somente se, é bijetiva.
(Sugestão: Demonstre que uma função possui inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva e à direita se, e somente se, é sobrejetiva).

5. Prove que a função inversa de uma função bijetora também é bijetora.

6. Para as funções $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, abaixo faça uma classifição quanto a injetividade, sobrejetividade, bijetividade e paridade (par e/ou ímpar).
Obs.: O conjunto A é o maior domínio possível para cada função.

   (a) $x \mapsto x^4$
   (b) $x \mapsto e^x$
   (c) $t \mapsto \sqrt{t}$
   (d) $t \mapsto \frac{1}{t}$
   (e) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$
   (f) $x \mapsto arctg(x)$
   (g) $t \mapsto sen(t)$
   (h) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
   (i) $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$

7. No exercício anterior encontre a função inversa as funções dadas e esboce seu gráfico (caso necessário, restrinja o domínio e/ou o contra-domínio a fim de obter uma função que possua inversa).

8. Utilizando os dois exercícios anteriores explique com suas próprias palavras porque a função $f(x) = x^2$ não possui função inversa, mas normalmente nos deparamos com situações em que nos respondem que o inverso de x^2 é $\pm\sqrt{x}$.

9. Encontre $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, nos seguintes casos:

   (a) $A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$
   (b) $A_n =]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$
   (c) $A_n = [-\frac{n}{5}, 2n]$
   (d) $A_n = [-10n, 0]$
   (e) $A_n =]n-1, n[$
   (f) $A_n =]0, \frac{1}{n}[$

10. Encontre $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ e $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, nos seguintes casos:

   (a) $A_\lambda =]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[\ , \ \lambda \in]0,1[$
   (b) $A_\lambda =]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[\ , \ \lambda \in]0,1]$
   (c) $A_\lambda =]1-\frac{1}{\lambda}, 1+\frac{1}{\lambda}[\ , \ \lambda \in]0,2]$
   (d) $A_\lambda = [-\lambda, 10\lambda] \ , \ \lambda \in [-3,5]$

Referências

[EL1] Lima, E. L. - Curso de Análise vol. 1, 12ed. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2006.

[GA1] Ávila, G. S. S. - Introdução à Análise Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blcher, 2000.