MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Lista 6 - Semestre 1 de 2022

Wilson Cuellar

1. Determine o domínio das seguintes funções e faça um esboço.

   (a) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - 3y^2 - z^2}$

   (b) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - |x| - |y| - |z|}$

   (c) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + 3z^2)$

2. Encontre a família de superfícies de nível para cada função.

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$

   (b) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

   (c) $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

3. Seja $f(x, y, z)$ diferenciável. Seja $g(t) = f(5t^3, 2e^{-2t}, 3t^2)$. Suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 2, 0) = -9$.

   (a) Determine $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   (b) Calcule $g'(0)$.

4. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície $xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 8$ no ponto $(1, 2, 1)$.

5. Determine um plano tangente à superfície $xyz = a$, $a \neq 0$, e que seja paralelo ao plano $x + y + z = 100$.

6. Determine os pontos do elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $3x - y + 3z = 1$.

7. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável cujo gráfico está contido na superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$. Sabe-se que $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2},\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

8. A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $x^2 + 3y^2 - z^2 = 3$. Suponha que $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

9. A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na interseção das superfícies no $\mathbb{R}^3$ $x^2 + y^2 = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Suponha que $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

10. **Quádricas.** Esboce o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem

    (a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 4$

    (b) $x^2 + y^2 = z^2$

    (c) $2x^2 - y^2 + z^2 = 0$

    (d) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$

11. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os

    (a) $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

    (b) $f(x, y) = xye^{-x^2 - y^2}$

    (c) $f(x, y) = (x - 1)^3 + (y - 2)^3 - 3x - 3y$

    (d) $f(x, y) = y \cos x$

12. Determine os valores de a tais que a função

$$f(x, y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local.

13. Mostre que $f(x,y) = xy^2 e^{-(x^2+y^2)^4}$ tem um número infinito de pontos críticos.

14. Mostre que $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$ tem apenas um único ponto crítico, de mínimo local, mas f não tem valor de mínimo absoluto.

15. Encontre o máximo e mínimo da função dada na região indicada. Faça um esboço da região.

    (a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$ no triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$.

    (b) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ em $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 2,\ x \leq 0,\ y \geq 0\right\}$

    (c) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$ em $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 3,\ \frac{-\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

    (d) $f(x,y) = y^2 - x^2$ em $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 4\right\}$

    (e) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| \leq 1\right\}$

16. Determine os valores máximo e mínimo da função f sujeita às restrições dadas

    (a) $f(x,y) = xy$; $9x^2 + y^2 = 4$

    (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $x^4 + y^4 = 1$

    (c) $f(x,y) = x^3 y$; $x^2 + 2y^2 = 1$

    (d) $f(x,y,z) = x - z$; $x^2 + y^2 = z$ e $z = 2y$

    (e) $f(x,y,z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

17. Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com $27cm^2$ de papelão.

18. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.

19. Suponha que $T(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano. Seja $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x,\ 2y + x \leq 4\right\}$. Determine o ponto de A de menor temperatura.

20. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?

21. Determine 3 números reais positivos cuja soma é 100, cujo produto seja máximo.