MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Lista 4 - Derivadas parciais - Diferenciabilidade - Plano tangente
Semestre 1 de 2022

Wilson Cuellar

1. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções

   (a) $f(x,y) = x^5y^4 - 3x^2y + 3x - y$

   (b) $f(x,y) = e^{x^2-y^3}$

   (c) $f(x,y) = \sin(x^2y)$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2}$

   (e) $f(x,y) = y^2\ln(x^2+y^4)$

   (f) $f(x,y) = xye^{x^2y^2}$

   (g) $f(x,y) = \ln(1+\sin^2(x^2y^3))$

   (h) $f(x,y) = e^{-x}\sin^2(x+y)$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = x^3y^2g(xy)$, onde g é uma função derivável de uma variável, tal que $g(-3) = 5$ e $g'(-3) = 2$. Calcule $f(1,-3)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-3)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-3)$.

3. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ não existe.

4. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

   (a) $f(x,y) = g\left(\dfrac{x}{y}\right)$

   (b) $f(x,y) = g(ax+by)$, onde a e b são constantes.

5. Considere a função $z = f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

6. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

7. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (c) f é diferenciável em $(0,0)$?

   (d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em (0,0)?

8. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Mostre que existem as derivadas parciais de f no $(0,0)$, e que f não é contínua em $(0,0)$. Conclua que f não é diferenciável em $(0,0)$.

(b) f é diferenciável em $(x,y) \neq (0,0)$?

9. Considere a seguinte função.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

   (b) f é diferenciável em $(0,0)$?

10. Considere a seguinte função.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

   (b) f é diferenciável em $(0,0)$?

   (c) f é diferenciável em $(x,y) \neq (0,0)$?

11. Seja $g(x,y) = \sqrt[3]{3x^4+2y^4}$. Mostre que g é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

12. Mostre que $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$ é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$.

13. Ache a equação do plano tangente e da reta normal ao gráfico de cada função no ponto indicado

   (a) $f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$, no ponto $(0,0,1)$

   (b) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + xy$, no ponto $(1,1,0)$

   (c) $f(x,y) = e^x \ln\left(\dfrac{y}{2}\right)$, no ponto $(1,2,0)$

   (d) $f(x,y) =$, no ponto $(1,2,0)$

14. Mostre que os gráficos das funções $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $g(x,y) = \frac{1}{10}(x^2+y^2) + \frac{5}{2}$ se intersectam no ponto $(3,4,5)$ e têm o mesmo plano tangente nesse ponto.

15. Determine uma equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$.

16. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2+ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x+z=0$.

17. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x+3y$ e tangente ao gráfico de $f(x,y) = x^2+xy$.