

MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I  
Funções de 2 variáveis: Gráficos, curvas de nível e limites -Lista 3  
Semestre 1 de 2022

Wilson Cuellar  
cuellar@ime.usp.br

1. Para cada função dada, determine e esboce o domínio; determine a imagem de  $f$ .

- |   |   |
|---|---|
| (a) $f(x, y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$ ; | (d) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ; |
| (b) $f(x, y) = \frac{x+y^2}{x-\pi y}$ ;   | (e) $f(x, y) = \tan(x-2y)$ ;                      |
| (c) $f(x, y) = \sqrt{ x - y }$ ;          | (f) $f(x, y) = e^{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ .            |

2. Determine e esboce a família de curvas de nível de cada uma das seguintes funções.

- |   |   |
|---|---|
| (a) $f(x, y) = 1 - 3x - 2y$ ;           | (e) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ ;                 |
| (b) $f(x, y) = y - \cos x$ ;            | (f) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ ;             |
| (c) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 - y^2}$ ; | (g) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$ ; |
| (d) $f(x, y) = xy$ ;                    | (h) $f(x, y) = x - \sqrt{1-y^2}$ ;            |

3. Encontre uma parametrização para a curva de nível  $k$  de  $f$  nos seguintes casos:

- (a)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2-y^2}$ ,  $k = 1$ ;      (b)  $f(x, y) = x + 2y - 3, k = -2$ ; (c)  $f(x, y) = x - \sqrt{1-2y^2}$ ,  $k = 5$ .

Determine a reta tangente às curvas acima nos pontos  $(\sqrt{2}, 1)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  e  $(6, 0)$ , respectivamente.

4. Esboce o gráfico de cada função:

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| (a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ ;         | (e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;     |
| (b) $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ ;      | (f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ . |
| (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$ ; | (g) $f(x, y) = y - x^2$ ;              |
| (d) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ ;       | (h) $f(x, y) = xy$ ;                   |

5. Em cada caso abaixo calcule o limite se existir, ou mostre que o limite não existe. Justifique sua resposta.

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$                        | (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy^2 - 1}{y - 1}$   |
| (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^4 + 2x^2y + 5y^2}$       | (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{xy + 1}{x^2 - y^2}$  |
| (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ | (h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$                                       |
| (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x)}{x(y^2 - 1)}$            | (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^3 + y^3}$  |
| (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x - y}$                | (j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ |

$$(k) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$$

6. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \sin(x) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

7. Determine o valor de  $a$  para que a seguinte função seja contínua

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

8. Determine os valores de  $a$  e  $b$  para que a seguinte função seja contínua

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 + ay^{4/3} + bx}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$