MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Curvas no plano e no espaço - Reta tangente- Lista 1
Semestre 1 de 2022

Wilson Cuellar Carrera
cuellar@ime.usp.br

1. Faça um esboço da trajetória de cada uma das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (2t-1, 3t+2)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (b) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (c) $\gamma(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (d) $\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (e) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$.
   (f) $\gamma(t) = (t, t, 1+\operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (g) $\gamma(t) = (2\operatorname{sen} t, 1, 2\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (h) $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (i) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$.
   (j) $\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, t)$, $t \geq 0$.
   (k) $\gamma(t) = (1+\operatorname{sen} t, 1+\operatorname{sen} t, \cos t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$

2. Esboçe e parametrize cada conjunto C como uma curva:

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 16\}$.
   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-6x-4y = 13\}$.
   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2-2x-16y = -1\}$.
   (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-4y^2+2x-8y = 7\}$.
   (e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, y < 1 \text{ e } x < -3\}$.
   (f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1 \text{ e } y < 0\}$.
   (g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 9 \text{ e } z-x = 2\}$.

3. Calcule

   (a) $\lim_{t\to 1}\gamma(t)$, onde $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, t^2, \frac{t-1}{t}\right)$
   (b) $\lim_{t\to 0}\gamma(t)$, onde $\gamma(t) = \left(\frac{\tan 3t}{t}, \frac{e^{2t}-1}{t}, t^3\right)$
   (c) $\lim_{t\to 2}\gamma(t)$, onde $\gamma(t) = \left(\frac{t^3-8}{t^2-4}, \frac{\cos(\frac{\pi}{t})}{t-2}, 2t\right)$

4. Determine equação da reta tangente à trajetória da curva dada, no ponto dado

   (a) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ e $\gamma(\frac{\pi}{3})$
   (b) $\gamma(t) = (t^2, t)$ e $\gamma(3)$
   (c) $\gamma(t) = (2\cos t - \cos(2t), 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(2t))$ e $\gamma(\pi)$
   (d) $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(2t), \operatorname{sen}(t+\operatorname{sen}(2t))$ e $\gamma(\pi/2)$
   (e) $\gamma(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, \cos t)$ e $\gamma(0)$

5. Seja $\alpha(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right)$. Mostre que o cosseno do ângulo entre γ e γ' é constante.

6. Verifique que a curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t \operatorname{sen} t)$ tem duas tangentes em $(0,0)$ e encontre suas equações. Esboçe a imagem da curva.

7. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva derivável em todos os pontos de I. Mostre que, se existe $C > 0$ tal que $\|\gamma(t)\| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Interprete geometricamente.