**$3^{\underline{a}}$ Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I**
**Turma 47 - Noturno**
**$1^{\underline{o}}$ semestre de 2022 - 13/07/2022$_A$**
**Prof. Wilson Cuellar**
**Monitor: Matheus de Souza Nunes**

1. (2,5) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $2x + 3y + z = 1$ é o plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(-1, 2, f(-1, 2))$. Determine

   (a) A reta tangente ao gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(te^t - \cos t, 2e^t + t)$ no ponto $(0, g(0))$.

   (b) O plano tangente ao gráfico de $h(u, v) = uf(uv, u^2 + v^2)$ no ponto $(1, -1, h(1, -1))$.

**Resolução:**

**a)** Seja o plano tangente a $f(-1,2) : z - f(-1,2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,2)(x+1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,2)(y-2)$, temos que $\nabla f(-1,2) = (-2,-3)$ e $f(-1,2) - 2 + 6 = 1 \Rightarrow f(-1,2) = -3$

A reta tangente ao gráfico de $g$ em $(0, g(0))$ é: $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$.
Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (te^t - \cos t, 2e^t + t)$. Então $\gamma(0) = (-1, 2)$

$g'(t) = (\dfrac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)), \dfrac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))) \cdot (x'(t), y'(t)) =$

$= \dfrac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))(e^t + te^t + \operatorname{sen} t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))(2e^t + 1))$. Portanto,

$g'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,2)x(0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,2)y'(0) = -2(e^0 + 0e^0 + \operatorname{sen} 0) - 3(2e^0 + 1) = -11.$

Assim, a reta tangente ao gráfico de $g$ em $(0, g(0))$ é $\mathbf{y = -11x - 3}$.

**b)** A equação do plano tangente ao gráfico de $h$ no ponto $(u_0, v_0, h(u_0, v_0))$ é

$z - h(u_0, v_0) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0)(x - u_0) + \dfrac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0)(y - v_0)$

$\nabla h(u_0, v_0) = (\dfrac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0))$

$\dfrac{\partial h}{\partial u} = f(uv, u^2 + v^2) + u(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}) = f(uv, u^2 + v^2) + u(v\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2u\,\dfrac{\partial f}{\partial y})$

$\dfrac{\partial h}{\partial v} = u(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}) = u(u\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2v\,\dfrac{\partial f}{\partial y})$

$\nabla h(1,-1) = (f(-1,2) + 1(-1\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,2) + 2\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,2), 1(1\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,2) - 2\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,2))) =$ $(-7, 4)$.

$h(1,-1) = f(-1,2) = -3$

Logo, o plano tangente ao gráfico de $h$ no ponto $(1, -1, h(1,-1)$ é: $z - h(1,-1) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(1,-1)(x-1) + \dfrac{\partial h}{\partial v}(1,-1)(y+1) \Rightarrow z + 3 = -7(x-1) + 4(y+1) \Rightarrow$ **7x-4y+z-8** $= \mathbf{0}$

2. (2,5) Considere as seguintes superfícies no $\mathbb{R}^3$

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 7x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 20\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = z^2\}.$$

(a) Encontre a equação do plano tangente à superfície $S_1$ no ponto $(3, -4, 5)$.

(b) Seja $\gamma(t)$ uma curva diferenciável com imagem contida na interseção de $S_1$ e $S_2$ tal que $\gamma(t_0) = (3, -4, 5)$ e $\gamma'(t_0) \neq (0, 0, 0)$. Encontre a equação da reta tangente a $\gamma$ no ponto $(3, -4, 5)$.

**Resolução:**
**a)** Seja $f(x, y, z) = 7x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 20$ a superfície $S_1$ é a superfície de nível 0 de $f$.

$\nabla f(x, y, z) = (14x, 4y, -6z)$. Logo, $f$ é de Classe $C^1$ e $\nabla f(3, -4, 5) = 2(21, -8, -15)$

O plano tangente a $S_1$ no ponto (3,-4,5) será: $\nabla f(3, -4, 5) \bullet (x - 3, y + 4, z - 5) = 0 \Rightarrow 2(21, -8, -15) \bullet (x - 3, y + 4, z - 5) = 0 \Rightarrow$ **21x - 8y - 15z - 20 = 0**

**b)** Seja $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, então $S_2$ é a superfície de nível 0 de $g$. Sendo $\gamma(t)$ a interseção de $S_1$ com $S_2$, temos que a reta tangente a $\gamma(t)$ é perpendicular a $\nabla f$ e a $\nabla g$ no ponto (3,-4,5).

$\nabla f(x, y, z) = (14x, 4y, -6z)$ e $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$

Logo, $\gamma'(t_0)$ é paralelo a $\nabla f(3, -4, 5) \times \nabla g(3, -4, 5) \parallel (21, -8, -15) \times (3, -4, -5) = 20(-1, 3, -3)$.

Portanto, a reta tangente será: $X = (3, -4, 5) + \lambda(-1, 3, -3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. (2,5) Determine os valores de $a$ tais que a função

$$f(x,y) = 2a^2x^4 + ay^2 - 4x^2 - 2ay$$

tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local.

**Resolução:** $f$ é classe $\mathcal{C}^2$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Se $a = 0$, então $f(x,y) = -4x^2$ e todo ponto $\{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$ é ponto de máximo de $f$. Suponhamos $a \neq 0$, encontremos os pontos críticos de $f$:

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ay - 2a = 2a(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 1$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8a^2x^3 - 8x = 8x(a^2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \mp \dfrac{1}{a}$

Logo, os pontos críticos são: $(0,1), (\frac{1}{a}, 1), (-\frac{1}{a}, 1)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a,\ \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24a^2x^2 - 8$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$H(x,y) = 2a(24a^2x^2 - 8)$

Para o ponto (0,1):
$H(0,1) = -16a$
$f_{xx}(0,1) = -8$

Para o ponto $(\frac{1}{a}, 1)$ :
$H(\frac{1}{a}, 1) = 32a$
$f_{xx}(\frac{1}{a}, 1) = 16$

Para o ponto $(-\frac{1}{a}, 1)$ :
$H(-\frac{1}{a}, 1) = 32a$
$f_{xx}(-\frac{1}{a}, 1) = 16$

Portanto, para ter 2 pontos de mínimo local e 1 ponto de sela: $a > 0$.

4. (2,5) Sejam $f(x,y,z) = x + y - z$ e $S$ o elipsoide definido por

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1 \right\}$$

Determine o valor máximo e mínimo de $f$ em $S$.

**Resolução:** Sendo $S$ fechado e limitado, então $S$ é compacto. Como $f$ é contínua, pelo teorema de Weierstrass $f$ admite máximo e mínimo absolutos em $S$. Seja $g(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1$. Então o elipsóide é a superfície de nível 0 de $g$.
$\nabla g(x,y,z) = (x, \frac{y}{2}, \frac{z}{3})$ e $\nabla f(x,y,z) = (1,1,-1)$.

Observamos $\nabla g(x,y,z) \neq (0,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in S$. Pelo teorema de multiplicadores de Lagrange, os candidatos de máximo e mínimo de $f$ em $S$ satisfazem $\{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z)\}$ são l.d. e $g(x,y,z) = 0$.

$$\nabla g(x,y,z) \times \nabla f(x,y,z) = (x, \frac{y}{2}, \frac{z}{3}) \times (1,1,-1) = (-\frac{y}{2} - \frac{z}{3}, x + \frac{z}{3}, x - \frac{y}{2}) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} -\frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 0 \\ x + \frac{z}{3} = 0 \Rightarrow z = -3x \\ x - \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow y = 2x \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{4x^2}{4} + \frac{9x^2}{6} = 1 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \; ou \; x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Portanto, $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-3}{\sqrt{3}}) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ é o valor de máximo de $f$ em $S$ e

$f(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}) = -\frac{6}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}$ é o valor de mínimo de $f$ em $S$.