

3ª Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I

Turma 22 - Noturno

1º semestre de 2022 - 11/07/2022_A

Prof. Wilson Cuellar

Monitor: Matheus de Souza Nunes

1. (2,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\nabla f(4, 1) = (6, 3)$ e $f(4, 1) = -2$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $g(u, v) = f(u + 2v, u^2 - v)$ no ponto $(-2, 3, g(-2, 3))$.

Resolução: Seja o plano tangente a $g(u_0, v_0) : z - g(u_0, v_0) = \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)(x - u_0) + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)(y - v_0)$

$$\nabla g(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + 2u \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = 2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

Seja $g(-2, 3) = f(-2 + 6, (-2)^2 - 3) = f(4, 1)$, temos que,

$$\nabla g(-2, 3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) - 4 \frac{\partial f}{\partial y}(4, 1), 2 \frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) - \frac{\partial f}{\partial y}(4, 1) \right) = (6 - 12, 12 - 3) = (-6, 9)$$

Já que $\frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) = 6$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(4, 1) = 3$

Sendo assim, o plano tangente a $g(-2, 3)$ é:

$$z - g(-2, 3) = \frac{\partial g}{\partial u}(-2, 3)(x + 2) + \frac{\partial g}{\partial v}(-2, 3)(y - 3) \Rightarrow z - f(4, 1) = -6(x + 2) + 9(y - 3) \Rightarrow$$

$$z + 2 = -6x - 12 + 9y - 27 \Rightarrow \mathbf{-6x + 9y - z - 41 = 0}$$

2. (2,0)

- (a) Seja r a reta tangente à curva $x - x^3 + xy + \sin(y/3) = 0$ no ponto $(1,0)$. Determine a equação da reta r .
- (b) Determine os pontos da curva $x^2 - xy + y^2 = 21$ cuja reta tangente seja paralela à reta r do item anterior.

Resolução:

a) Seja $f(x, y) = x - x^3 + xy + \sin(y/3)$ com a curva de nível igual a 0.

$$\nabla f(x_0, y_0) = (1 - 3x_0^2 + y_0, x_0 + \frac{\cos(y_0/3)}{3}) \text{ temos que } \nabla f(1, 0) = (-2, \frac{4}{3})$$

$$\text{Logo, } r \text{ é: } \nabla f(1, 0) \bullet (x - 1, y - 0) = 0 \Rightarrow (-2, \frac{4}{3}) \bullet (x - 1, y) = 0 \Rightarrow -2x + 2 + \frac{4y}{3} = 0 \Rightarrow y = \frac{3x - 3}{2}.$$

b) Seja $g(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na curva de nível igual a 21.

$\nabla g(x_0, y_0) = (2x_0 - y_0, -x_0 + 2y_0)$ Como a reta tg a $g(x, y)$ é paralela à reta r , temos que, $\nabla g(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla f(1, 0) = \lambda(-3, 2)$. Logo,

$$2x_0 - y_0 = -3\lambda \Rightarrow x_0 = -\frac{4\lambda}{3}$$

$$-x_0 + 2y_0 = 2\lambda \Rightarrow y_0 = \frac{\lambda}{3}$$

Logo $x_0 = -4y_0$.

$$g(-4y_0, y_0) = 16y_0^2 + 4y_0 + y_0^2 = 21 \Rightarrow y_0^2 = 1$$

Se $y_0 = 1$, então obtemos o ponto $(-4, 1)$. Se $y_0 = -1$, então obtemos o ponto $(4, -1)$.

3. (2,0) Determine e classifique os pontos críticos de $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$.

Resolução: Observamos que f é de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2}$$

Logo, os pontos críticos são $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 1)$ e $(-\sqrt{2}, 1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2x$$

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)^2 = 4 - 4y - 4x^2$$

Para o ponto $(0, 0)$:

$$H(0, 0) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2$$

Então $(0, 0)$ é ponto de mínimo local.

Para o ponto $(\sqrt{2}, 1)$:

$$H(\sqrt{2}, 1) = -8 \Rightarrow (\sqrt{2}, 1) \text{ é ponto de sela.}$$

Para o ponto $(-\sqrt{2}, 1)$:

$$H(-\sqrt{2}, 1) = -8 \Rightarrow (-\sqrt{2}, 1) \text{ é ponto de sela.}$$

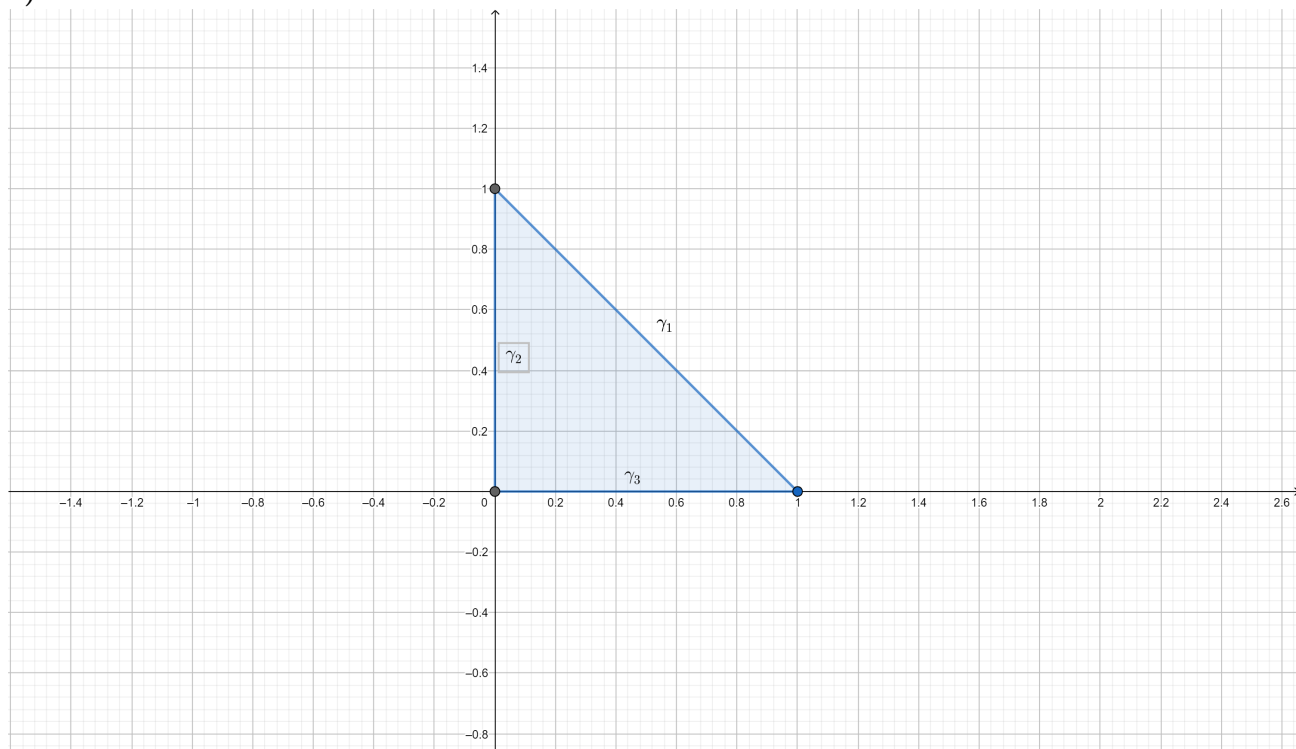
4. (2,0) Considere a função de duas variáveis $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ e o conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

- Faça um esboço de K . Justifique a existência de valor máximo e mínimo de f em K .
- Encontre os pontos críticos de f no interior de K .
- Encontre os valores máximo e mínimo de f em K .

Resolução:

a)



Seja K um conjunto limitado e fechado, por γ_1, γ_2 e γ_3 , K configura um conjunto compacto. Pelo teorema de Weierstrass, sendo $f(x,y)$ uma função contínua no conjunto compacto K , temos que existirá (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , tais que, $m = f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2) = M$, para todo $(x, y) \in K$.

b) No interior de f , os candidatos são os pontos críticos (que anulam o gradiente de $f(x,y)$) Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1 - x - y) - xy = y(1 - 2x - y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = 1 - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1 - x - y) - xy = x(1 - x - 2y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$$

Logo, os pontos críticos de $f(x,y)$ são: $(0,0), (1,0), (0,1)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

b) - Pontos críticos: $(0,0), (1,0), (0,1)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

- Pontos no bordo (fronteira):

$$\gamma_1(t) = (t, 1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad f(\gamma_1(t)) = t(1 - t)(1 - t - (1 - t)) = (t - t^2)0 = 0 \Rightarrow f'(\gamma_1(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma_2(t) = (0, t), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad f(\gamma_2(t)) = 0t(1 - 0 - t) = 0 \Rightarrow f'(\gamma_2(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma_3(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad f(\gamma_3(t)) = t0(1 - t - 0) = 0 \Rightarrow f'(\gamma_3(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Pontos nos vértices (extremos): $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Logo,

$$f(0, 0) = 0; f(1, 0) = 0; f(0, 1) = 0 \text{ e } f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$$

Portanto, o valor de máximo é de $\frac{1}{27}$, no ponto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e o valor de mínimo é 0, atingido em todos os pontos da fronteira.

5. (2,0) Determine os pontos do elipsoide $x^2 + y^2 + xy + z^2 = 21$ cuja soma das coordenadas seja máxima.

Resolução: Seja a soma das coordenadas dada por $g(x, y, z) = x + y + z$ e seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy + z^2 - 21$, logo o elipsóide é a superfície de nível 0 de f .

Sendo o elipsoide compacto e g contínua, pelo teorema de Weierstrass, g admite máximo e mínimo em S . Encontremos os candidatos a partir de Multiplicadores de Lagrange:

$\nabla f(x, y, z) = (2x + y, 2y + x, 2z)$ e $\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Logo $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ para todo (x, y, z) no elipsóide.

Por outro lado, $\nabla f(x, y, z) \times \nabla g(x, y, z) = 0 \iff$

$$\begin{vmatrix} 2x + y & 1 & \vec{i} \\ 2y + x & 1 & \vec{j} \\ 2z & 1 & \vec{k} \end{vmatrix} = (2y + x - 2z, 2z - 2x - y, x - y) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2y + x - 2z = 0 \\ 2z - 2x - y = 0 \Rightarrow z = \frac{3x}{2} \\ x - y = 0 \Rightarrow x = y \\ x^2 + y^2 + xy + z^2 = 21 \Rightarrow x^2 + x^2 + x^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = 21 \Rightarrow \frac{21x^2}{4} = 21 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{cases}$$

Logo, o ponto cuja soma de suas coordenadas seja a máxima possível é: $(2, 2, 3)$.