2ª Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Turma 47 - Noturno
1º semestre de 2022 - 06/06/2022$_A$
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Matheus de Souza Nunes

1. (2,5) Em cada caso abaixo calcule o limite se existir, ou mostre que o limite não existe.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{e^x - e^y}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^4+y^4}\right)}{x^2+y^2}$

Resolução:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x - \sin y}{x-y}\,\frac{x-y}{e^x-e^y}$

Observe que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x)-g(y)}{x-y} = g'(0)$. Logo, temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x - \sin y}{x-y} = [\frac{d}{dt}\sin t]_{t=0} = \cos 0 = 1$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{e^x-e^y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\frac{e^x-e^y}{x-y})^{-1} = [\frac{d}{dt}e^t]_{t=0} = e^0 = 1$

Portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x - \sin y}{x-y}\,\frac{x-y}{e^x-e^y} = 1 \,.\, 1 = 1$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin(\sqrt{x^4+y^4})}{x^2+y^2}\,\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt{x^4+y^4}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^4+y^4})}{\sqrt{x^4+y^4}}\,\frac{x\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2}$

Para o limite da primeira expressão, temos,

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^4+y^4})}{\sqrt{x^4+y^4}}$, substituindo $\sqrt{x^4+y^4} = t$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Para o limite da segunda expressão,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sqrt{\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sqrt{\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}}$$

A expressão $\displaystyle\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$ e $\displaystyle\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}$ são limitadas, pois $0 \le x^2 \le x^2+y^2 \Rightarrow 0 \le (x^2)^2 \le (x^2+y^2)^2 \Rightarrow 0 \le \displaystyle\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} \le 1$, logo, a expressão $\displaystyle\sqrt{\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}}$ é uma expressão limitada sendo multiplicada por um valor que tende a 0, portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sqrt{\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}} = 0$$

Assim, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^4+y^4})}{\sqrt{x^4+y^4}}\,\frac{x\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2} = 1 \,.\, 0 = 0$

2. (2,5) Considere a função de duas variáveis

$$\begin{cases} \dfrac{2y^4 + x^4 - x^2y - 3x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) A função f é contínua em $(0, 0)$? Justifique sua resposta.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) A função f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique sua resposta.

Resolução:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^4 + x^4 - x^2y - 3x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^4}{x^2 + y^2} + \frac{x^4}{x^2 + y^2} - \frac{x^2y}{x^2 + y^2} - \frac{3x^3}{x^2 + y^2} =$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y\,x^2}{x^2 + y^2} - \frac{3x\,x^2}{x^2 + y^2}$

Sendo $\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ ou $\dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$ limitada, pois $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$

Temos então quatro multiplicações de um conjunto limitado por um valor que tende a zero, sendo assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y\,x^2}{x^2 + y^2} - \frac{3x\,x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Logo, a função f é contínua em (0,0), já que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$

b) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{0+x^4-0-3x^3}{x^2+0} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 3x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(x - 3)}{x^3} =$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} x - 3 = -3.$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{2y^4+0-0-0}{0+y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{2y^4}{y^3} = \lim_{y\to 0} 2y = 0.$$

c) Sendo, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{||(h, k)||}$ com $(x_0, y_0) =$ $(0, 0)$, temos então,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{||(h, k)||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{2k^4+h^4-h^2k-3h^3}{h^2+k^2} - 0 + 3h - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{2k^4+h^4-h^2k-3h^3+3h^3+3hk^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2k^4 + h^4 - h^2k + 3hk^2}{\sqrt[2]{(h^2 + k^2)^3}}$$

Considerando uma curva $\gamma(t) = (t, t)$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^4 + t^4 - t^3 + 3t^3}{\sqrt{(2t^2)^3}} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^4 + 2t^3}{|t|\,t^2\,\sqrt{8}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3(3t + 2)}{|t|\,t^2\,\sqrt{8}} = \lim_{t\to 0} \frac{t(3t + 2)}{|t|\,\sqrt{8}} \begin{cases} \lim_{t\to 0^+} \frac{t(3t+2)}{t\,\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}} \\ \lim_{t\to 0^-} \frac{t(3t+2)}{-t\,\sqrt{8}} = -\frac{2}{\sqrt{8}} \end{cases} \Rightarrow$$

$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t(3t + 2)}{|t|\,\sqrt{8}}$ não existe

Logo, a função f não é diferenciável em (0,0).

2 (2,5) Considere a função de duas variáveis

$$\begin{cases} \dfrac{3y^4 + x^4 - x^2y - 2x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) A função f é contínua em $(0, 0)$? Justifique sua resposta.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) A função f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique sua resposta.

Resolução:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^4 + x^4 - x^2y - 2x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^4}{x^2 + y^2} + \frac{x^4}{x^2 + y^2} - \frac{x^2y}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3}{x^2 + y^2} =$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y\,x^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x\,x^2}{x^2 + y^2}$

Sendo $\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ ou $\dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$ limitada, pois $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$

Temos então quatro multiplicações de um conjunto limitado por um valor que tende a zero, sendo assim,

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y\,x^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x\,x^2}{x^2 + y^2} = 0$

Logo, a função f é contínua em (0,0), já que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$

b) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{0+x^4-0-2x^3}{x^2+0} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 2x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(x - 2)}{x^3} =$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} x - 2 = -2.$

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{3y^4+0-0-0}{0+y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{3y^4}{y^3} = \lim_{y\to 0} 3y = 0.$

c) Sendo, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{||(h, k)||}$ com $(x_0, y_0) =$ $(0, 0)$, temos então,

$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{||(h, k)||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{3k^4+h^4-h^2k-2h^3}{h^2+k^2} - 0 + 2h - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$

$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{3k^4+h^4-h^2k-2h^3+2h^3+2hk^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{3k^4 + h^4 - h^2k + 2hk^2}{\sqrt[2]{(h^2 + k^2)^3}}$

Considerando uma curva $\gamma(t) = (t, t)$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{3t^4 + t^4 - t^3 + 2t^3}{\sqrt{(2t^2)^3}} = \lim_{t\to 0} \frac{4t^4 + t^3}{|t|\,t^2\,\sqrt{8}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3(4t + 1)}{|t|\,t^2\,\sqrt{8}} = \lim_{t\to 0} \frac{t(4t + 1)}{|t|\,\sqrt{8}} \begin{cases} \lim_{t\to 0^+} \frac{t(4t+1)}{t\,\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \lim_{t\to 0^-} \frac{t(4t+1)}{-t\,\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{8}} \end{cases} \Rightarrow$$

$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t(4t + 1)}{|t|\,\sqrt{8}}$ não existe

Logo, a função f não é diferenciável em (0,0).

3. (2,5) Determine os planos que contém os pontos $(2, 1, 16)$ e $(1, 1, 12)$ e que sejam tangentes ao gráfico de $f(x, y) = xy^2$.

Resolução: A equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ será, caso f seja diferenciável,

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Sendo $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy$, percebe-se que as derivadas parciais são contínuas em todo o domínio de $f(x, y)$, logo, $f(x, y)$ é diferenciável e, portanto, a equação do plano encontrada será do plano tangente ao gráfico de f.

I. Para o ponto (2,1,16): $16 = f(x_0, y_0) + y_0^2(2 - x_0) + 2x_0y_0(1 - y_0)$
II. Para o ponto (1,1,12): $12 = f(x_0, y_0) + y_0^2(1 - x_0) + 2x_0y_0(1 - y_0)$

Fazendo I - II: $4 = y_0^2 \Rightarrow y_0 = 2$ ou $y_0 = -2$
Substituindo o valor de $y_0 = 2$ para a expressão II: $12 = f(x_0, 2) + 2^2(1 - x_0) + 2x_0 2(1 - 2) \Rightarrow 12 = 4x_0 + 4 - 4x_0 - 4x_0 \Rightarrow x_0 = -2$

Portanto, temos que a equação do plano tangente a $f(x, y)$ que contém os pontos (2,1,16) e (1,1,12), será,
$z = f(-2, 2) + 4(x + 2) - 8(y - 2) \Rightarrow z = -8 + 4x + 8 - 8y + 16 \Rightarrow 4x - 8y - z + 16 = 0$

Substituindo o valor de $y_0 = -2$ para a expressão II: $12 = f(x_0, -2) + (-2)^2(1 - x_0) + 2x_0(-2)(1 + 2) \Rightarrow 12 = 4x_0 + 4 - 4x_0 - 12x_0 \Rightarrow x_0 = -\dfrac{2}{3}$

Portanto, temos que a equação do plano tangente a $f(x, y)$ que contém os pontos (2,1,16) e (1,1,12), será,
$z = f(-\frac{2}{3}, -2) + 4(x + \frac{2}{3}) + \frac{8}{3}(y + 2) \Rightarrow z = -\frac{8}{3} + 4x + \frac{8}{3} + \frac{8}{3}y + \frac{16}{3} \Rightarrow 4x + \frac{8}{3}y - z + \frac{16}{3} = 0 \Rightarrow 12x + 8y - 3z + 16 = 0$

3 (2,5) Determine os planos que contém os pontos $(2, 1, -16)$ e $(1, 1, -20)$ e que sejam tangentes ao gráfico de $f(x, y) = xy^2$.

Resolução: A equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ será, caso f seja diferenciável,

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Sendo $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$, percebe-se que as derivadas parciais são contínuas em todo o domínio de $f(x, y)$, logo, $f(x, y)$ é diferenciável e, portanto, a equação do plano encontrada será do plano tangente ao gráfico de f.

I. Para o ponto (2,1,-16): $-16 = f(x_0, y_0) + y_0^2(2 - x_0) + 2x_0y_0(1 - y_0)$
II. Para o ponto (1,1,-20): $-20 = f(x_0, y_0) + y_0^2(1 - x_0) + 2x_0y_0(1 - y_0)$

Fazendo I - II: $4 = y_0^2 \Rightarrow y_0 = 2$ ou $y_0 = -2$
Substituindo o valor de $y_0 = 2$ para a expressão II: $-20 = f(x_0, 2) + 2^2(1 - x_0) + 2x_0 2(1 - 2) \Rightarrow -20 = 4x_0 + 4 - 4x_0 - 4x_0 \Rightarrow x_0 = 6$

Portanto, temos que a equação do plano tangente a $f(x, y)$ que contém os pontos (2,1,-16) e (1,1,-20), será,
$z = f(6, 2) + 4(x - 6) + 24(y - 2) \Rightarrow 4x + 24y - z - 48 = 0$

Substituindo o valor de $y_0 = -2$ para a expressão II: $-20 = f(x_0, -2) + (-2)^2(1 - x_0) + 2x_0(-2)(1 + 2) \Rightarrow -20 = 4x_0 + 4 - 4x_0 - 12x_0 \Rightarrow x_0 = 2$

Portanto, temos que a equação do plano tangente a $f(x, y)$ que contém os pontos (2,1,-16) e (1,1,-20), será,
$z = f(2, 2) + 4(x - 2) - 8(y + 2) \Rightarrow z = 8 + 4x - 8 - 8y - 16 \Rightarrow 4x - 8y - z - 16 = 0$

4. (2,5) Considere a função $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)^{2/3}$.

(a) Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem.

(b) Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas.

(c) Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f é diferenciável.

Resolução:

a) i. Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3}(x^2 + 2y^2)^{-1/3}\, 2x = \frac{4x}{3(x^2 + 2y^2)^{1/3}}$$

Para $(x,y) = (0,0)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 + 0)^{2/3} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{4/3}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{1/3} = 0$$

ii. Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(x^2 + 2y^2)^{-1/3}\, 4y = \frac{8y}{3(x^2 + 2y^2)^{1/3}}$$

Para $(x,y) = (0,0)$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{(0 + 2y^2)^{2/3} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{4/3}\,\sqrt[3]{4}}{y} = \lim_{y\to 0} y^{1/3}\,\sqrt[3]{4} = 0$$

Portanto, as derivadas parciais existem para todo o $\mathbb{R}^2$.

b) i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ será contínua em (0,0) $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x}{3(2x^2 + y^2)^{1/3}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{x^3}{2x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{x\,x^2}{2x^2 + y^2}}$$

Com $\dfrac{x^2}{2x^2 + y^2}$ limitada, pois $0 \leq x^2 \leq 2x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^2}{2x^2 + y^2} \leq 1$, sendo multiplicada por um valor que tende a zero, seu resultado tende a ser 0. Portanto,

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{x\,x^2}{2x^2 + y^2}} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ o que implica que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (0,0), além de ser contínua em $(x,y) \neq (0,0)$ pois é quociente de funções contínuas onde o denominador não se anula.

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ será contínua em (0,0) $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8y}{3(2x^2 + y^2)^{1/3}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{y^3}{2x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{y\,y^2}{2x^2 + y^2}}$$

Com $\dfrac{y^2}{2x^2 + y^2}$ limitada, pois $0 \leq y^2 \leq 2x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{y^2}{2x^2 + y^2} \leq 1$, sendo multiplicada por um valor que tende a zero, seu resultado tende a ser 0. Portanto,

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{y\,y^2}{2x^2 + y^2}} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ o que implica que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em (0,0), além de ser contínua em $(x, y) \neq (0, 0)$ pois é quociente de funções contínuas onde o denominador não se anula.

Logo, as derivadas parciais são contínuas em todo o $\mathbb{R}^2$.

c) Já que as derivadas parciais existem e são contínuas em todo o $Dom_f = \mathbb{R}^2$, isso implica que f é diferenciável em todo o seu domínio, ou seja, f é diferenciável em todo R^2.

4 (2,5) Considere a função $f(x,y) = (2x^2+y^2)^{2/3}$.

(a) Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem.

(b) Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas.

(c) Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f é diferenciável.

Resolução:

a) i. Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3}(2x^2+y^2)^{-1/3}\,4x = \frac{8x}{3(2x^2+y^2)^{1/3}}$$

Para $(x,y) = (0,0)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x^2+0)^{2/3}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{4/3}\sqrt[3]{4}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{1/3}\,\sqrt[3]{4} = 0$$

ii. Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(2x^2+y^2)^{-1/3}\,2y = \frac{4y}{3(2x^2+y^2)^{1/3}}$$

Para $(x,y) = (0,0)$: $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{(0+y^2)^{2/3}-0}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y^{4/3}}{y} = \lim_{y\to 0} y^{1/3} =$ 0

Portanto, as derivadas parciais existem para todo o $\mathbb{R}^2$.

b) i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ será contínua em (0,0) $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{8x}{3(2x^2+y^2)^{1/3}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{x^3}{2x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{x\,x^2}{2x^2+y^2}}$$

Com $\dfrac{x^2}{2x^2+y^2}$ limitada, pois $0 \leq x^2 \leq 2x^2+y^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^2}{2x^2+y^2} \leq 1$, sendo multiplicada por um valor que tende a zero, seu resultado tende a ser 0. Portanto,

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{x\,x^2}{2x^2+y^2}} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ o que implica que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (0,0), além de ser contínua em $(x,y) \neq (0,0)$ pois é quociente de funções contínuas onde o denominador não se anula.

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ será contínua $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4y}{3(2x^2+y^2)^{1/3}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{y^3}{2x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{y\,y^2}{2x^2+y^2}}$$

Com $\dfrac{y^2}{2x^2+y^2}$ limitada, pois $0 \leq y^2 \leq 2x^2+y^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{y^2}{2x^2+y^2} \leq 1$, sendo multiplicada por um valor que tende a zero, seu resultado tende a ser 0. Portanto,

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{y\,y^2}{2x^2+y^2}} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ o que implica que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em (0,0), além de ser contínua em $(x, y) \neq (0, 0)$ pois é quociente de funções contínuas onde o denominador não se anula.

Logo, as derivadas parciais são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$

c) Já que as derivadas parciais existem e são contínuas em todo o $Dom_f = \mathbb{R}^2$, isso implica que f é diferenciável em todo o seu domínio, ou seja, f é diferenciável em todo R^2.