$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Turma 22 - Noturno
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2022 - 06/06/2022$_A$
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Matheus de Souza Nunes

1. (1,5) Considere a função de duas variáveis $f(x,y) = y - \sqrt{1-2x^2}$.

   Encontre uma parametrização para a curva de nível $c = 2$ de f. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto $\left(\dfrac{1}{2}, 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   Resolução: $D_f = \{(x,y) \in R^2 : -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\}$

   $f(x,y) = c \Rightarrow y - \sqrt{1-2x^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{1-2x^2} = y - 2 \Rightarrow 1 - 2x^2 = (y-2)^2 \Rightarrow 1 = (\sqrt{2}x)^2 + (y-2)^2$

   $\begin{cases} x(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ y(t) = 2 + \sin t \end{cases} \Rightarrow \gamma(t) = (\dfrac{\cos t}{\sqrt{2}}, 2 + \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma parametrização de $f(x,y)$ na curva de nível $c = 2$.

   Seja $\gamma'(t) = (-\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}, \cos t)$.

   Sendo $\gamma(t) = (\dfrac{\cos t}{\sqrt{2}}, 2 + \sin t) = (\dfrac{1}{2}, 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

   Logo, a equação da reta tangente à curva no ponto $(\dfrac{1}{2}, 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ será: $X = \gamma(\frac{\pi}{4}) + \lambda\, \gamma'(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + \lambda\, (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. (2,0) Em cada caso abaixo calcule o limite se existir, ou mostre que o limite não existe.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} x - y}{x - \operatorname{sen} y}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^4+y^2}$

Resolução:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x)-y}{x-\sin(y)}$

Tomando $\gamma_1(t) = (t, 0)$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t - 0}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Porém, se tomarmos uma curva $\gamma_2(t) = (t, t)$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t - \sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{-(t - \sin t)}{t - \sin t} = -1$$

Ao utilizar duas curvas distintas que tendem ao mesmo ponto, (0,0), temos valores de limites diferentes, logo, o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x)-y}{x-\sin(y)}$ não existe.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3\sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}\,\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\dfrac{x^3(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

Para a primeira expressão do limite, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \text{ substituindo } x^2+y^2 = t \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Para a segunda expressão do limite, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(x^2+y^2)}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\,x^2}{x^4+y^2} + \frac{x^3\,y^2}{x^4+y^2}$$

Sendo $\dfrac{x^4}{x^4+y^2}$ e $\dfrac{y^2}{x^4+y^2}$ limitadas, pois $0 \le x^4 \le x^4+y^2 \Rightarrow 0 \le \dfrac{x^4}{x^4+y^2} \le 1$ e $0 \le y^2 \le x^4+y^2 \Rightarrow 0 \le \dfrac{y^2}{x^4+y^2} \le 1$, temos então duas expressões limitadas sendo multiplicadas por um valor que tende a 0. Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\,x^2}{x^4+y^2} + \frac{x^3\,y^2}{x^4+y^2} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\frac{x^3(x^2+y^2)}{x^4+y^2} = 1\,.\,0 = 0$$

3. (2,5) Considere a função de duas variáveis $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$

(a) Determine o domínio e a imagem de f.

(b) Determine e esboce a curvas de nível 1 de f.

(c) Existe $a \in \mathbb{R}$ para que a seguinte função seja contínua em $(0,0)$?

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Resolução:

a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$

Se $x > 0 \Rightarrow f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{x}{2} \in \mathbb{R}_+$

Se $x < 0 \Rightarrow f(x,-x) = \dfrac{-x^2}{2x} = -\dfrac{x}{2} \in \mathbb{R}_-$

Se $x = 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow f(x,y) = \dfrac{0y}{y} = 0$

Logo, $Im_f = \mathbb{R}$

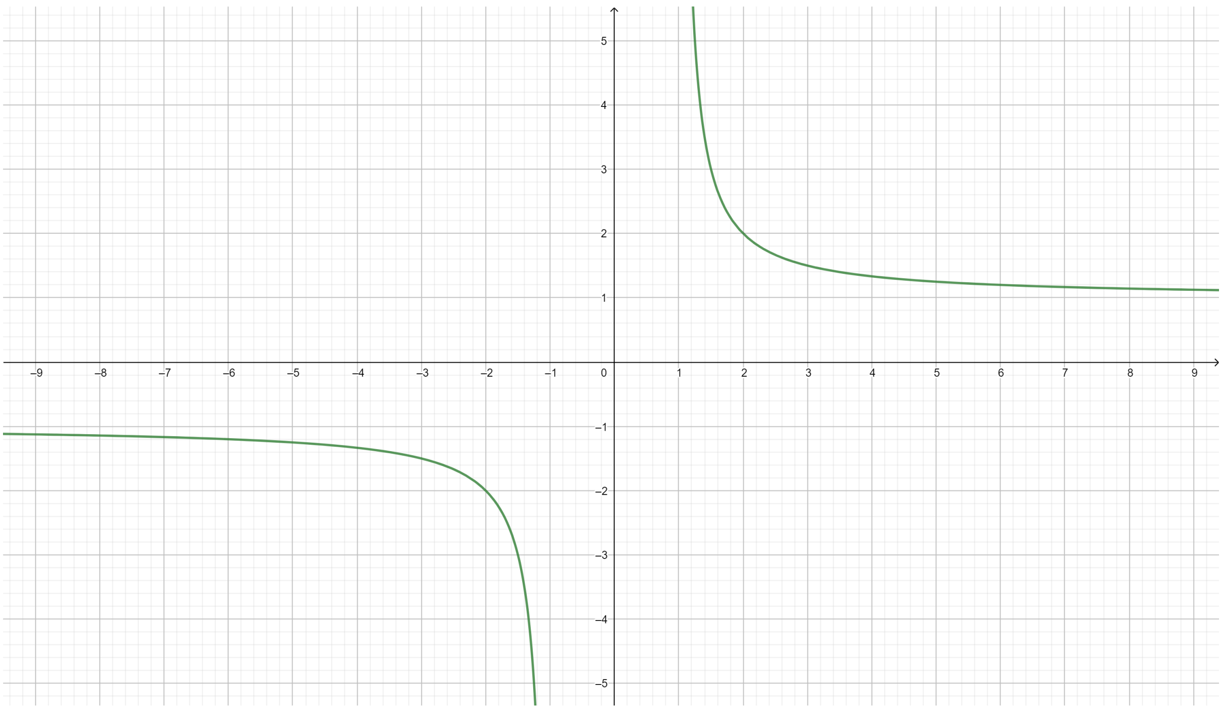
b) Sendo $c = 1$, temos

$f(x,y) = c \Rightarrow \dfrac{xy}{|x|+|y|} = 1 \Rightarrow xy = |x|+|y| \Rightarrow x\,.\,y \geq 0$

Caso i) $x, y > 0 \Rightarrow xy = x + y \Rightarrow y(x-1) = x \Rightarrow y = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow x > 1$

Caso ii) $x, y < 0 \Rightarrow xy = -x - y \Rightarrow y(x+1) = -x \Rightarrow y = -\dfrac{x}{x+1} \Rightarrow x < 1$

Logo, pela união de i) com ii), temos que o esboço de f na curva de nível c = 1 é,



c) f será contínua em (0,0) $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}$

Temos que $\dfrac{x}{|x|+|y|}$ é limitada, pois $|x| \leq |x|+|y| \Rightarrow \dfrac{|x|}{|x|+|y|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \dfrac{x}{|x|+|y|} \leq 1$

Logo,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{|x|+|y|}\ y = 0$$

Portanto, existe um $a \in R$ tal que $f(x,y)$ seja contínua em (0,0), basta tomar $a = 0$.

4. (2,5) Em cada caso abaixo determine se a função é diferenciável em $(0,0)$.

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4+y^2}$.

(b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Resolução:

a) Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{4x^3}{3(x^4+y^2)^{2/3}}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{3(x^4+y^2)^{2/3}}$

Para $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{4/3}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{2/3}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \text{ não existe.}$$

Logo, como não existe $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, f não é diferenciável em (0,0).

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\, \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0 = g(0,0)$, g é contínua em (0,0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y^3}{0+y^2}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^3} = 1$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{||(h,k)||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{k^3}{h^2+k^2} - 0 - 0 - 1k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^3-kh^2-k^3}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

Considerando a curva $\gamma(t) = (t,t)$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{-t^3}{2\sqrt{2}\,t^2\,|t|} = \begin{cases} \lim_{t\to 0^+} \frac{-t}{t\,2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \\ \lim_{t\to 0^-} \frac{-t}{-t\,2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \text{não existe o } \lim_{t\to 0} \frac{-t^3}{2\sqrt{2}\,t^2\,|t|}$$

Logo, $g(x,y)$ não é diferenciável em (0,0).

5. (1,5) Seja $f(x, y) = (ax + by)\,\text{sen}\,(xy)$. Determine números reais a e b tais que as seguintes duas condições sejam satisfeitas simultaneamente.

   (a) O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 1, f(0, 1))$ seja perpendicular ao plano $3x - y + 6z = 0$.

   (b) O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0, f(1, 0))$ seja paralelo ao plano $7x - z = 0$.

Resolução:

a) Equação do plano tangente é: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0) = z$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a\sin(xy) + y\cos(xy)(ax + by) \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = b$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b\sin(xy) + x\cos(xy)(ax + by) \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 0$

$\pi_1 : b(x - 0) + 0(y - 1) - z + f(0, 1) = 0$

$\pi_2 : 3x - y + 6z = 0$

$\vec{n_{\pi_1}} \bullet \vec{n_{\pi_2}} = 0 \Rightarrow (b, 0, -1) \bullet (3, -1, 6) = 0 \Rightarrow 3b + 0 - 6 = 0 \Rightarrow b = 2$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = a$

$\pi_3 : 0(x - 1) + a(y - 0) - z + f(1, 0) = 0$

$\pi_4 : 7x - z = 0$

$\vec{n_{\pi_3}} \times \vec{n_{\pi_4}} = (0, a, -1) \times (7, 0, -1) = (-a, 7, -7a) \neq (0, 0, 0)$

Logo, não existe $a \in \mathbb{R}$ tais que $(0, a, -1)$ seja paralelo a (7,0,-1).