$1^{\underline{a}}$ Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Turma 47 - Noturno
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2022 - 02/05/2022$_A$
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Matheus de Souza Nunes

1. (2,0) Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = ((1+\cos^2 t)\,\text{sen}t,\, \text{sen}^2 t\cos t)$ $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Resolução: $L(\gamma(t)) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} ||\gamma'(t)||dt$

$x'(t) = -2\cos t\sin^2 t + (1+\cos^2 t)\cos t = \cos t(-2\,\text{sen}^2 t + 1 + \cos^2 t) = \cos t(-3\sin^2 t + 2)$

$y'(t) = 2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t = \sin t(2\cos^2 t - \sin^2 t) = \sin t(-3\sin^2 t + 2)$

$\gamma'(t) = (\cos t(-3\sin^2 t+2), \sin t(-3\sin^2 t+2)) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-3\sin^2 t+2)^2} = |-3\sin^2 t+2|$

Logo, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |-3\sin^2 t+2|dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -(-3\sin^2 t+2)dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 t - 2dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{3\cos 2t}{2} - \frac{1}{2}dt =$

$\displaystyle[-\frac{3\sin 2t}{4} - \frac{t}{2}]|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \frac{\pi}{4} + \frac{3\sin(\frac{2\pi}{3})}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12}$

1. (2,0) Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = ((1+\text{ sen}^2 t)\cos t, \cos^2 t\,\text{sen} t)$ $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Resolução: $L(\gamma(t)) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} ||\gamma'(t)||dt$

$x'(t) = 2\sin t\cos^2 t - \sin t(1+\sin^2 t) = 2\sin t(1-\sin^2 t) - \sin t - \sin^3 t = \sin t - 3\sin^3 t = \sin t(1-3\sin^2 t)$.

$y'(t) = -2\cos t\sin^2 t + \cos^3 t = \cos t(-2\sin^2 t + \cos^2 t) = \cos t(-2\sin^2 t + 1 - \sin^2 t) = \cos t(1-3\sin^2 t)$.

$\gamma'(t) = (\sin t(1-3\sin^2 t), \cos t(1-3\sin^2 t)) \Rightarrow ||\gamma'(t)|| = \sqrt{(1-3\sin^2 t)^2} = |1-3\sin^2 t|$

Logo, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |1-3\sin^2 t|dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -(1-3\sin^2 t)dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (-1+3\sin^2 t)dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{3\cos 2t}{2}\right) dt =$

$\displaystyle [\frac{t}{2} - \frac{3\sin 2t}{4}]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\pi}{6} + \frac{3\sin(\frac{2\pi}{3})}{4} = -\frac{\pi}{12} + \frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Q2-(3,0) Considere a curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (2t^3 - 3t^2, 3t^2 + 6t)$$

1. Encontre as interseções da imagem de γ com os eixos.
2. Determine $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ache os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal ou vertical.
3. Estude o sinal das funções x' e y' para decidir qual a direção e sentido de γ', conforme t varia no intervalo $[-1, 1]$.
4. Estude a concavidade da imagem da curva γ conforme t varia no intervalo $[-1, 0]$.

Resolução:
a) γ intercepta o eixo x quando $y(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 6t = 0 \Rightarrow t(3t + 6) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -2$.
γ intercepta o eixo y quando $x(t) = 0 \Rightarrow 2t^3 - 3t^2 = 0t^2(2t - 3) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \frac{3}{2}$.
Logo, $\gamma(t)$ intercepta os eixos em: $\gamma(0) = (0, 0), \gamma(-2) = (28, 0)$ e $\gamma(\frac{3}{2}) = (0, \frac{63}{4})$.

b) $x'(t) = 6t^2 - 6t$ e $y'(t) = 6t + 6$. Logo $\gamma'(t) = (6t^2 - 6t, 6t + 6)$.
A reta tangente é horizontal quando $x'(t) \neq 0$ e $y'(t) = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.
A reta tangente é vertical quando $y'(t) \neq 0$ e $x'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 6t = 6t(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 1$.
Logo, a reta tangente à curva é horizontal em $\gamma(-1) = (-5, 3)$ e a reta tangente à curva é vertical em $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\gamma(1) = (-1, 9)$.

c) $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 1$; $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.
- $t = -1 : x'(t) > 0$ e $y'(t) = 0 \Longrightarrow \gamma'(t)$ apresenta o sentido $\rightarrow$
- $-1 < t < 0 : x'(t) > 0$ e $y'(t) > 0 \Longrightarrow \gamma'(t)$ apresenta o sentido $\nearrow$
- $t = 0 : x'(t) = 0$ e $y'(t) > 0 \Longrightarrow \gamma'(t)$ apresenta o sentido $\uparrow$
- $0 < t < 1 : x'(t) < 0$ e $y'(t) > 0 \Longrightarrow \gamma'(t)$ apresenta o sentido $\nwarrow$
- $t = 1 : x'(t) = 0$ e $y'(t) > 0 \Longrightarrow \gamma'(t)$ apresenta o sentido $\uparrow$

d) Assumindo que no intervalo $[-1, 0]$ a curva γ representa y como função de x obtemos $\dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{6(t+1)}{6t(t-1)} = \dfrac{(t+1)}{t(t-1)}$. Logo,
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{t+1}{t(t-1)}\right)}{6t(t-1)} = \frac{t(t-1) - (t+1)(2t-1)}{t^2(t-1)^2(6t(t-1))} = \frac{-(t^2 + 2t - 1)}{6t^3(t-1)^3}.$$
Como as raízes do numerador são $-1-\sqrt{2}$ (que é menor que -1) e $-1+\sqrt{2} > 0$, então $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ no intervalo $(-1, 0)$. Portanto a curva apresenta concavidade para cima nesse intervalo.

Q2-(3,0) Considere a curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (3t^2 + 6t, 2t^3 - 3t^2)$$

1. Encontre as interseções da imagem de γ com os eixos.

2. Determine $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ache os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal ou vertical.

3. Estude o sinal das funções x' e y' para decidir qual a direção e sentido de γ', conforme t varia no intervalo $[-1, 1]$.

4. Estude a concavidade da imagem da curva γ conforme t varia no intervalo $[-1, 0]$.

Resolução:
a) γ intercepta o eixo y quando $x(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 6t = 0 \Rightarrow t(3t + 6) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -2$.
γ intercepta o eixo x quando $y(t) = 0 \Rightarrow 2t^3 - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2(2t - 3) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \frac{3}{2}$.
Logo, $\gamma(t)$ intercepta os eixos em: $\gamma(0) = (0, 0), \gamma(-2) = (0, -28)$ e $\gamma(\frac{3}{2}) = (\frac{63}{4}, 0)$.

b) $y'(t) = 6t^2 - 6t$ e $x'(t) = 6t + 6$. Logo $\gamma'(t) = (6t + 6, 6t^2 - 6t)$.
A reta tangente é vertical quando $y'(t) \neq 0$ e $x'(t) = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.
A reta tangente é horizontal quando $x'(t) \neq 0$ e $y'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 6t = 6t(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 1$.
Logo, a reta tangente à curva é vertical em $\gamma(-1) = (-3, -5)$ e a reta tangente à curva é horizontal em $\gamma(0) = (0, 0)$ e em $\gamma(1) = (9, -1)$.

c) $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$; $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = 0$.
- $t = -1 : y'(t) > 0$ e $x'(t) = 0 \Longrightarrow \gamma'(t)$ apresenta o sentido $\uparrow$
- $-1 < t < 0 : y'(t) > 0$ e $x'(t) > 0 \Longrightarrow \gamma'(t)$ apresenta o sentido $\nearrow$
- $t = 0 : y'(t) = 0$ e $x'(t) > 0 \Longrightarrow \gamma'(t)$ apresenta o sentido $\rightarrow$
- $0 < t < 1 : y'(t) < 0$ e $x'(t) > 0 \Longrightarrow \gamma'(t)$ apresenta o sentido $\searrow$
- $t = 1 : y'(t) = 0$ e $x'(t) > 0 \Longrightarrow \gamma'(t)$ apresenta o sentido $\rightarrow$

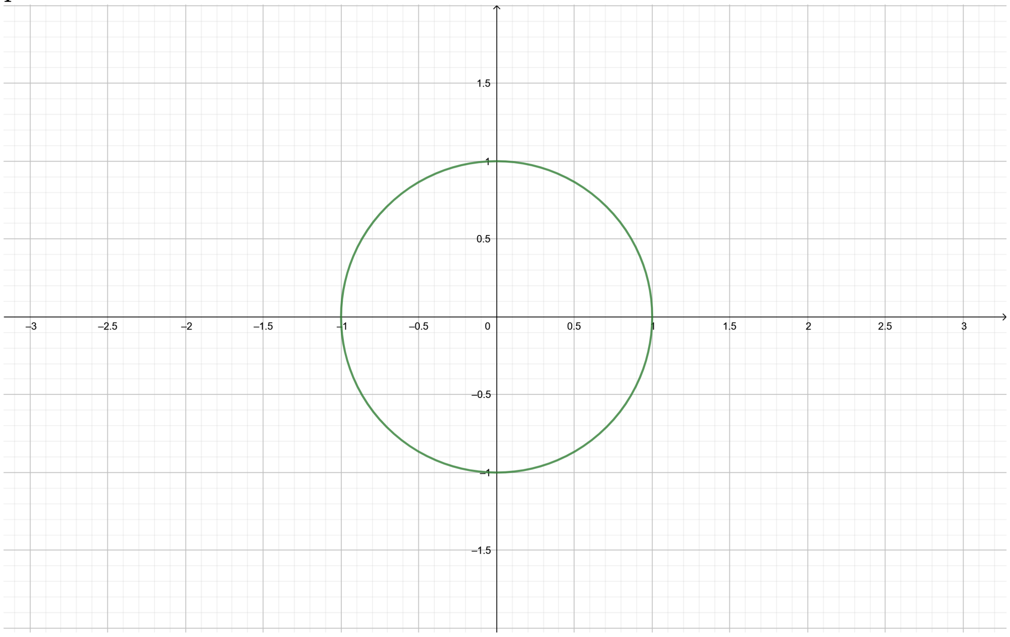
d) Assumindo que no intervalo $[-1, 0]$ a curva γ representa y como função de x obtemos $\dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{6t(t-1)}{6(t+1)} = \dfrac{t(t-1)}{(t+1)}$. Logo,
$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{t(t-1)}{t+1}\right)}{6(t+1)} = \dfrac{(2t-1)(t+1) - t(t-1)}{(t+1)^2(6(t+1))} = \dfrac{t^2 + 2t - 1}{6(t+1)^3}$.
Como as raízes do numerador são $-1-\sqrt{2}$ (que é menor que -1) e $-1+\sqrt{2} > 0$, então $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ no intervalo $(-1, 0)$. Portanto a curva apresenta concavidade para baixo nesse intervalo.

Q3-(2,0) Considere as seguintes curvas dadas em coordenadas polares
$\mathcal{C}_1 : r = 1$
$\mathcal{C}_2 : r = 2(1 + \text{sen}\theta)$

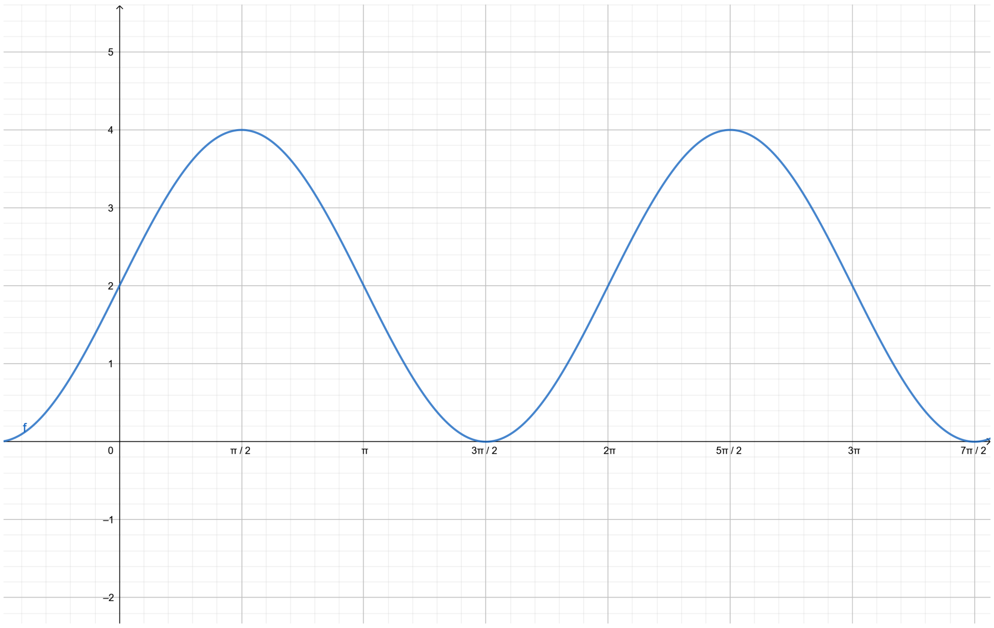
1. Determine se as curvas são simétricas em relação ao eixo pólar ou ao eixo y. Faça um esboço de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

2. Encontre a área da região obtida pela interseção dos interiores das curvas $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

Resolução:
a) Curva C_1: Como $r_1(\theta) = r_1(-\theta) = 1$ e $r_1(\theta) = r_1(\pi - \theta) = 1$ temos que C_1 é simétrica tanto em relação ao eixo polar quanto em relação ao eixo vertical (eixo y). Seu esboço é dado por:



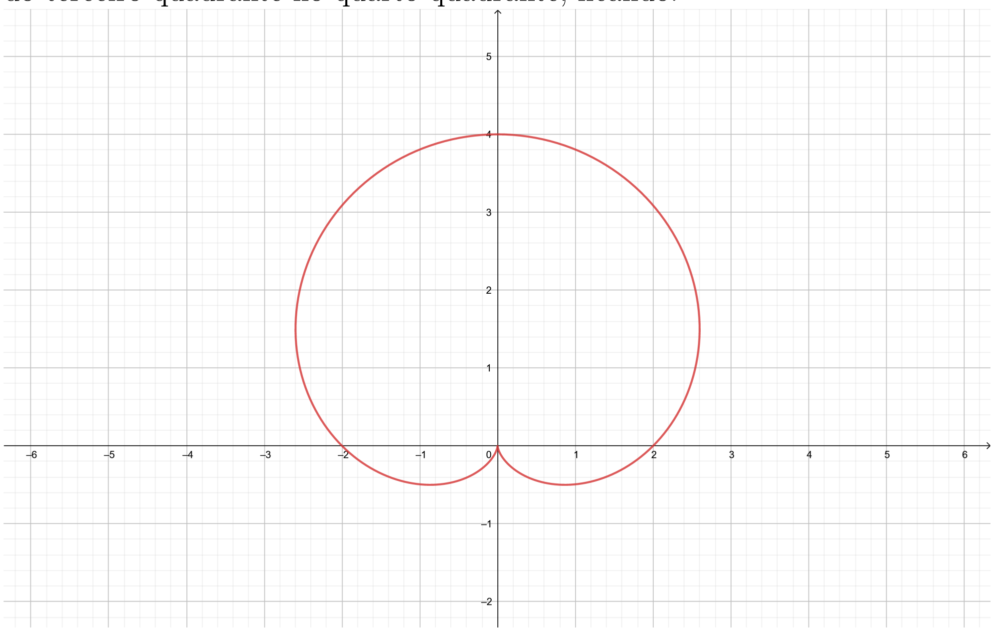
Curva $C_2 : r_2(\theta) = 2 + 2\sin\theta$
I: $r_2(\theta) \stackrel{?}{=} r_2(-\theta)$. Tomando $\theta = \frac{\pi}{4}$, temos que $r_2(\frac{\pi}{4}) = 2 + \sqrt{2}$ enquanto $(2 + \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ não pertence à curva $\mathcal{C}_2$.
II: $r_2(\theta) \stackrel{?}{=} r_2(\pi - \theta) \Rightarrow 2 + 2\sin\theta = 2 + 2\sin(\pi - \theta)$, pois $\sin(\pi - \theta) = \sin(\pi)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\pi) = \sin\theta$. Logo, $r_2(\theta) = r_2(\pi - \theta)$
De I concluímos que C_2 não é simétrica em relação ao eixo polar. De II concluímos que C_2 é simétrica em relação ao eixo vertical (eixo y).
Conforme o gráfico do raio da curva C_2,



Percebe-se que o raio parte do $\theta = 0$, atinge seu máximo com o valor de 4 em $\theta = \frac{\pi}{2}$ e zera quando $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Sendo

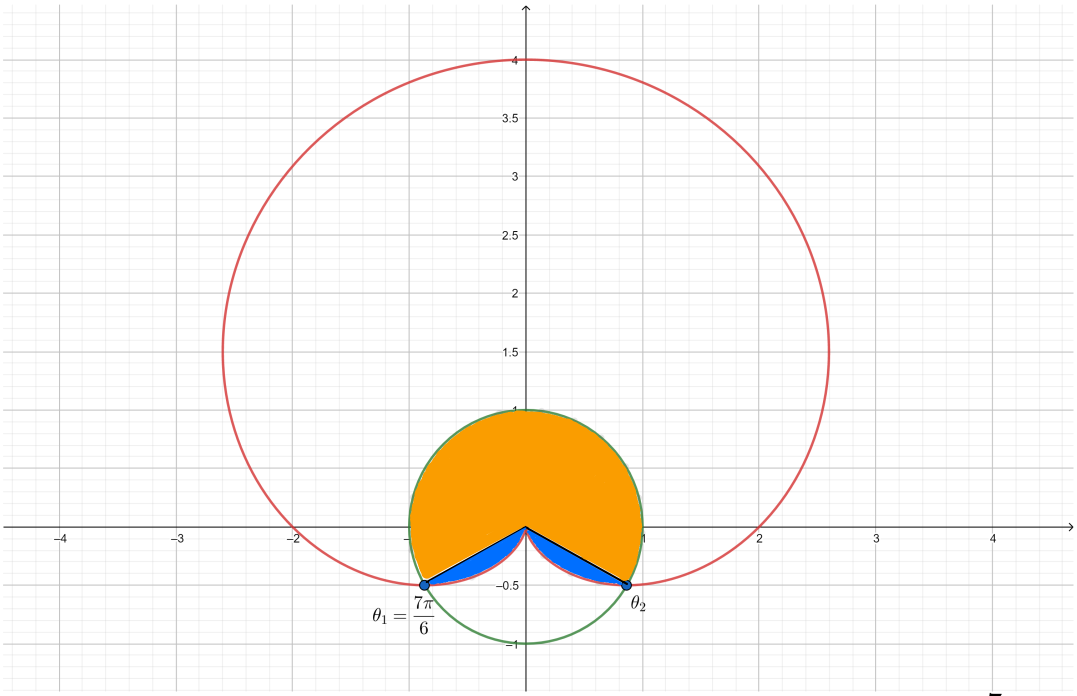
$$\left\{ \begin{array}{c} x(\theta) = r\cos\theta \\ y(\theta) = r\,\mathrm{sen}\theta \end{array} \right\}. \tag{1}$$

temos que a curva parte do $C_2(0) = (2, 0)$ e chega em $C_2(\frac{\pi}{2}) = (0, 4)$. Por questão da simetria com o eixo y, essa trecho desenhado no primeiro quadrante se espelha no segundo quadrante, com θ variando de 0 até π. Quando θ varia de π até $\frac{3\pi}{2}$, o raio vai de 1 até 0, fazendo com que se crie um trajeto contínuo do ponto $(-2, 0)$ até $(0, 0)$, localizado no terceiro quadrante. Novamente, por questão de simetria em relação ao eixo vertical, podemos espelhar esse trajeto do terceiro quadrante no quarto quadrante, ficando:



b) $A = \displaystyle\int \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$

$r_1 = r_2 \Rightarrow 1 = 2 + 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{7\pi}{6}$



O ângulo θ_2 se obtém da seguinte forma: $\theta_2 = 2\pi - (\theta_1 - \pi) \Rightarrow \theta_2 = 2\pi - (\frac{7\pi}{6} - \pi) = \frac{11\pi}{6}$.
A área hachurada é $A_1 + A_2$, onde A_1 é a área do setor circular (em amarelo) de ângulo $2\pi - \frac{4\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$, e A_2 é a área do setor azul. Por simetria, $A_2 = 2A$, onde

$$A = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2}(r_2^2(\theta))d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} 4(1+\sin\theta)^2 d\theta = 2\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)d\theta$$

$$= 2\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\sin\theta - \frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = 2[\frac{3\theta}{2} - 2\cos\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}]|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{4}} = 2\left(\frac{9\pi}{4} - \left(\frac{7\pi}{4} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right) = \pi - \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

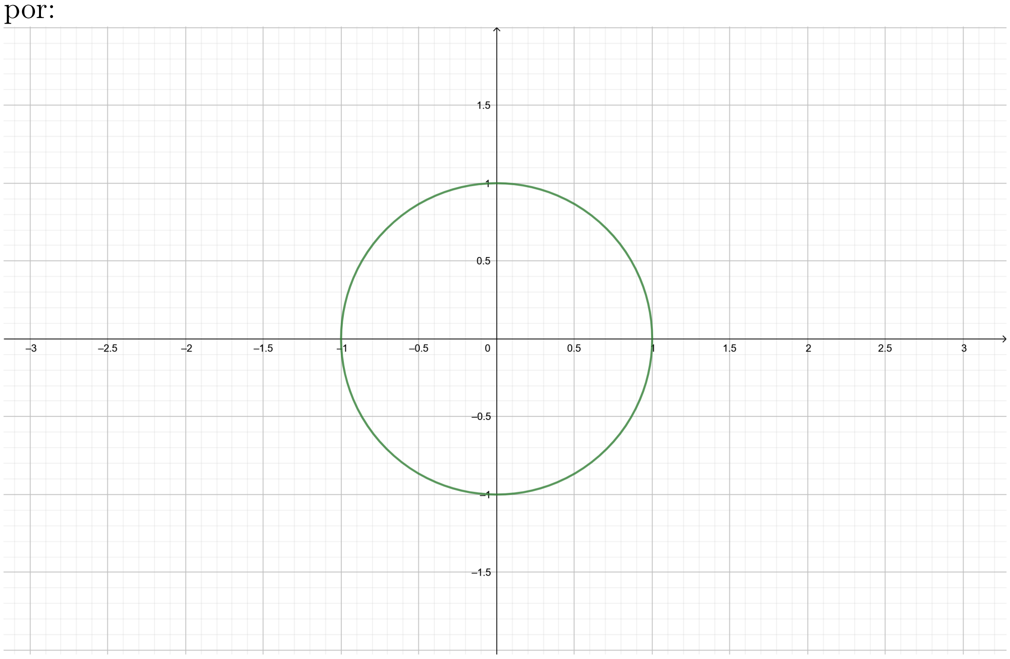
Logo, área total é $A_1 + 2A = \frac{2\pi}{3} + 2\pi - \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Q3- (2,0) Considere as seguintes curvas dadas em coordenadas polares
$\mathcal{C}_1 : r = 1$
$\mathcal{C}_2 : r = 2(1 - \text{sen}\theta)$

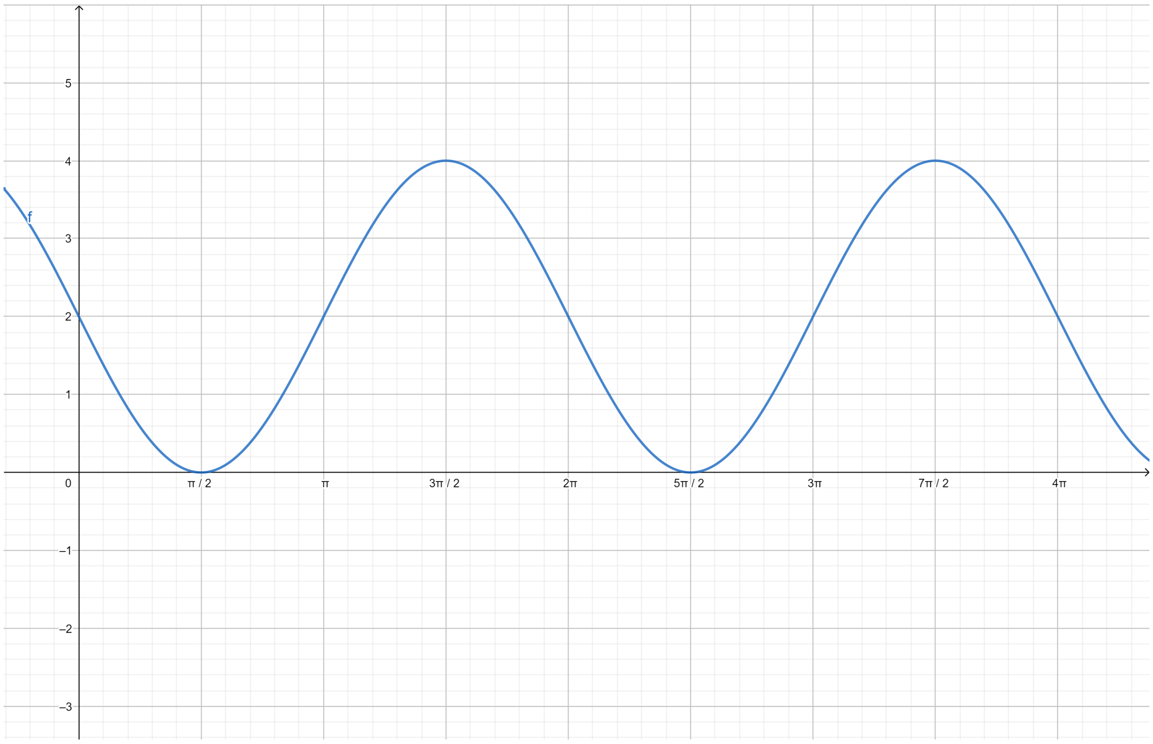
1. Determine se as curvas são simétricas em relação ao eixo pólar ou ao eixo y. Faça um esboço de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

2. Encontre a área da região obtida pela interseção dos interiores das curvas $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

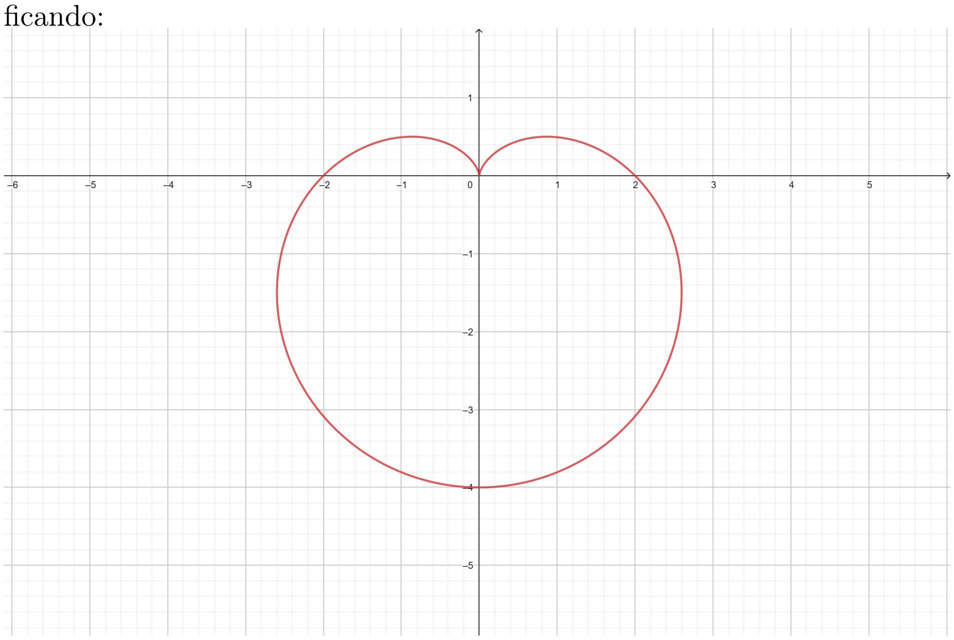
Resolução:
a) Curva C_1: Como $r_1(\theta) = r_1(-\theta) = 1$ e $r_1(\theta) = r_1(\pi - \theta) = 1$ temos que C_1 é simétrica tanto em relação ao eixo polar quanto em relação ao eixo vertical (eixo y). Seu esboço é dado por:



Curva $C_2 : r_2(\theta) = 2 - 2\sin\theta$
I: $r_2(\theta) \stackrel{?}{=} r_2(-\theta)$. Tomando $\theta = \frac{\pi}{4}$, temos que $r_2(\frac{\pi}{2}) = 2 - \sqrt{2}$ enquanto $(2 - \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ não pertence à curva $\mathcal{C}_2$.
II: $r_2(\theta) \stackrel{?}{=} r_2(\pi - \theta) \Rightarrow 2 - 2\sin\theta = 2 - 2\sin(\pi - \theta)$, pois $\sin(\pi - \theta) = \sin(\pi)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\pi) = \sin\theta$. Logo, $r_2(\theta) = r_2(\pi - \theta)$
De I concluímos que C_2 não é simétrica em relação ao eixo polar. De II concluímos que C_2 é simétrica em relação ao eixo vertical (eixo y).
Conforme o gráfico do raio da curva C_2,

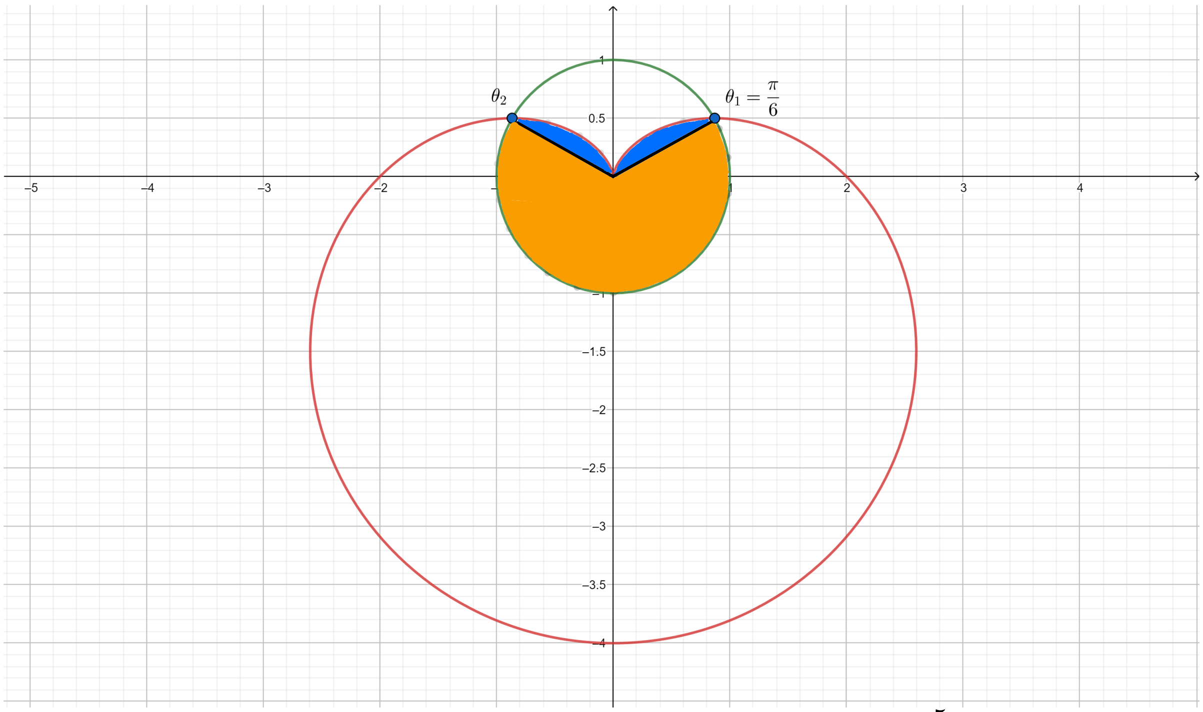


Percebe-se que o raio parte do $\theta = 0$, atinge seu mínimo em $\theta = \frac{\pi}{2}$ e máximo, igual a 4, quando $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Sendo $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ temos que a curva parte do $C_2(0) = (2,0)$ e chega em $C_2(\frac{\pi}{2}) = (0,0)$. Por questão da simetria com o eixo y, essa trecho desenhado no primeiro quadrante se espelha no segundo quadrante, com θ variando de 0 até π. Quando θ varia de π até $\frac{3\pi}{2}$, o raio vai de 2 até 4, fazendo com que se crie um trajeto contínuo do ponto $(-2,0)$ até $(0,4)$, localizado no terceiro quadrante. Novamente, por questão de simetria em relação ao eixo vertical, podemos espelhar esse trajeto do terceiro quadrante no quarto quadrante, ficando:



b) $A = \int \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$

$r_1 = r_2 \Rightarrow 1 = 2 - 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$



O ângulo θ_2 se obtém da seguinte forma: $\theta_2 = \pi - \theta_1 \Rightarrow \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
A área hachurada é $A_1 + A_2$, onde A_1 é a área do setor circular (em amarelo) de ângulo $2\pi - \frac{4\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$, e A_2 é a área do setor azul. Por simetria, $A_2 = 2A$, onde

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(r_2^2(\theta))d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4(1-\sin\theta)^2 d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta)d\theta$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2} - 2\sin\theta - \frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = 2[\frac{3\theta}{2} + 2\cos\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}]|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{3\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right) = \pi - \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Logo, área total é $A_1 + 2A = \frac{2\pi}{3} + 2\pi - \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Q4- (3,0) Considere a função de duas variáveis $f(x,y) = \dfrac{2(x-1)^2+5y^2}{x^2+y^2}$.

1. Encontre uma parametrização para a curva de nível $c = 1$ de f. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto $(3, 1/2)$.

2. Encontre uma parametrização para a curva de nível $c = 3$ de f. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto $(\sqrt{6}-2, 0)$.

Resolução:

a) $f(x,y) = 1 \Rightarrow \dfrac{2(x-1)^2+5y^2}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow 2x^2-4x+2+5y^2 = x^2+y^2 \Rightarrow x^2-4x+2+4y^2 = 0 \Rightarrow$ $x^2-4x+4+4y^2 = 2 \Rightarrow (x-2)^2+4y^2 = 2 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{2}+2y^2 = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{2}y)^2 = 1$.

Logo,

$$x(t) = \sqrt{2}\cos t + 2$$
$$y(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}$$

E, portanto, $\gamma(t) = \left(\sqrt{2}\cos t + 2, \dfrac{\sqrt{2}\sin t}{2}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$ é uma parametrização da curva de nível 1 de f.

$\gamma'(t) = \left(-\sqrt{2}\sin t, \dfrac{\sqrt{2}\cos t}{2}\right)$.

$\left(\sqrt{2}\cos t + 2, \dfrac{\sqrt{2}\sin t}{2}\right) = \left(3, \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2}\cos t + 2 = 3 \Rightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}\sin t}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\}. \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$.

$\gamma'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Logo, a reta tangente a $\gamma(t)$ no ponto $(3, \frac{1}{2})$ é: $X = (3, \frac{1}{2}) + \lambda(-1, \frac{1}{2})$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $f(x,y) = 3 \Rightarrow \dfrac{2(x-1)^2+5y^2}{x^2+y^2} = 3 \Rightarrow 2x^2-4x+2+5y^2 = 3x^2+3y^2 \Rightarrow x^2+4x-2y^2 = 2 \Rightarrow$ $x^2+4x+4-2y^2 = 6 \Rightarrow (x+2)^2-2y^2 = 6 \Rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{6} - \dfrac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$.

Logo, $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sqrt{6}\sec t - 2 \\ y(t) = \sqrt{3}\tan t \end{array} \right.$

E, portanto, $\gamma(t) = (\sqrt{6}\sec t - 2, \sqrt{3}\tan t)$, $t \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$ é uma parametrização da curva de nível 3 de f.

$\gamma'(t) = (\sqrt{6}\tan t \sec t, \sqrt{3}\sec^2 t)$

$(\sqrt{6}\sec t - 2, \sqrt{3}\tan t) = (\sqrt{6}-2, 0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{6}\sec t - 2 = \sqrt{6}-2 \Rightarrow \sec t = 1 \\ \sqrt{3}\tan t = 0 \Rightarrow \tan t = 0 \end{array} \right. \Rightarrow t = 0.$

$\gamma'(0) = (0, \sqrt{3})$.

Logo, a reta tangente a $\gamma(t)$ no ponto $(\sqrt{6}-2, 0)$ é: $X = (\sqrt{6}-2, 0) + \lambda(0, \sqrt{3})$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Q4-(3,0) Considere a função de duas variáveis $f(x,y) = \dfrac{5x^2 + 2(y-1)^2}{x^2+y^2}$.

1. Encontre uma parametrização para a curva de nível $c = 1$ de f. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto $(1/2, 3)$.

2. Encontre uma parametrização para a curva de nível $c = 3$ de f. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto $(0, \sqrt{6} - 2)$.

Resolução:

a) $f(x,y) = 1 \Rightarrow \dfrac{2(y-1)^2 + 5x^2}{y^2 + x^2} = 1 \Rightarrow 2y^2 - 4y + 2 + 5x^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 - 4y + 2 + 4x^2 = 0 \Rightarrow$
$y^2 - 4y + 4 + 4x^2 = 2 \Rightarrow (y-2)^2 + 4x^2 = 2 \Rightarrow \dfrac{(y-2)^2}{2} + 2x^2 = 1 \Rightarrow (\sqrt{2}x)^2 + \left(\dfrac{y-2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$

Logo, $\begin{cases} x(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t + 2 \end{cases}$

E, portanto, $\gamma(t) = \left(\dfrac{\cos t}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin t + 2\right)$, $t \in [0, 2\pi]$ é uma parametrização da curva de nível 1 de f.

$\gamma'(t) = \left(\dfrac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\cos t\right)$.

$\left(\dfrac{\cos t}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin t + 2\right) = \left(\dfrac{1}{2}, 3\right) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin t + 2 = 3 \Rightarrow \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}.$

$\gamma'(\frac{\pi}{4}) = \left(\dfrac{-1}{2}, 1\right)$.

Logo, a reta tangente a $\gamma(t)$ no ponto $(\frac{1}{2}, 3)$ é: $X = (\frac{1}{2}, 3) + \lambda(\frac{-1}{2}, 1)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $f(x,y) = 3 \Rightarrow \dfrac{2(y-1)^2 + 5x^2}{y^2 + x^2} = 3 \Rightarrow 2y^2 - 4y + 2 + 5x^2 = 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow y^2 + 4y - 2x^2 = 2 \Rightarrow$
$y^2 + 4y + 4 - 2x^2 = 6 \Rightarrow (y+2)^2 - 2x^2 = 6 \Rightarrow \dfrac{(y+2)^2}{6} - \dfrac{x^2}{3} = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{y+2}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$

Logo, $\begin{cases} y(t) = \sqrt{6}\sec t - 2 \\ x(t) = \sqrt{3}\tan t \end{cases}$

E, portanto, $\gamma(t) = (\sqrt{3}\tan t, \sqrt{6}\sec t - 2)$, $t \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$ é uma parametrização da curva de nível 3 de f.

$\gamma'(t) = (\sqrt{3}\sec^2 t, \sqrt{6}\tan t \sec t)$

$(\sqrt{3}\tan t, \sqrt{6}\sec t - 2) = (0, \sqrt{6} - 2) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{6}\sec t - 2 = \sqrt{6} - 2 \Rightarrow \sec t = 1 \\ \sqrt{3}\tan t = 0 \Rightarrow \tan t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0.$

$\gamma'(0) = (\sqrt{3}, 0)$.

Logo, a reta tangente a $\gamma(t)$ no ponto $(0, \sqrt{6} - 2)$ é: $X = (0, \sqrt{6} - 2) + \lambda(\sqrt{3}, 0)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.