1ª Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Turma 22 - Noturno
1º semestre de 2022 - 02/05/2022$_A$
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Matheus de Souza Nunes

1. (1,5) Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = \left(t - \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{4}, e^t + e^{-t}\right)$, $t \in [0,1]$.

   Resolução: $L(\gamma(t)) = \displaystyle\int_0^1 \|\ \gamma\prime(t)\ \|\ dt.$

   $\gamma'(t) = (1 - \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}, e^t - e^{-t}) \Rightarrow \|\ \gamma\prime(t)\ \| = \sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + (1 - \dfrac{e^{2t} + e^{2t}}{2})^2} \Rightarrow$
   $= \sqrt{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t} + 1 - e^{2t} - e^{-2t} + \dfrac{(e^{4t} + 2e^{2t}e^{-2t} + e^{-4t})^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{e^{4t} + e^{-4t} - 2}}{2} = \mid \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} \mid$

   Logo, $L(\gamma(t)) = \displaystyle\int_0^1 \mid \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} \mid dt = \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{2t} - e^{-2t} dt = \dfrac{1}{2}[\dfrac{e^{2t}}{2} + \dfrac{e^{-2t}}{2}]|_0^1 =$
   $\dfrac{1}{4}(e^2 + e^{-2} - 2) = \dfrac{(e - e^{-1})^2}{4}$

2. (1,5) Considere a curva parametrizada $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\operatorname{sen} t, \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \right)$$

(a) Encontre as interseções da imagem de γ com os eixos.

(b) Determine $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Ache os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal ou vertical.

Resolução:

a) A curva intercepta o eixo y quando $x(t) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} t = 0 \Rightarrow t = 0, t = \pi$ ou $t = 2\pi$.

A curva intercepta o eixo x quando $y(t) = 0 \Rightarrow \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t} = 0 \Rightarrow \cos^2 t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$ ou $t = \dfrac{3\pi}{2}$.

Logo, $\gamma(t)$ intercepta o eixo y em $\gamma(0) = (0, 1), \gamma(\pi) = (0, \frac{1}{3})$ e $\gamma(2\pi) = (0, 1)$ e $\gamma(t)$ intercepta o eixo x em $\gamma(\dfrac{\pi}{2}) = (1, 0)$ e $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (-1, 0)$.

b) $x'(t) = \cos t$.

$y'(t) = \dfrac{-2 \cos t \operatorname{sen} t(2 - \cos t) - \cos^2 t \operatorname{sen} t}{(2 - \cos t)^2} = \dfrac{\cos t \operatorname{sen} t(\cos(t) - 4)}{(2 - \cos t)^2}$.

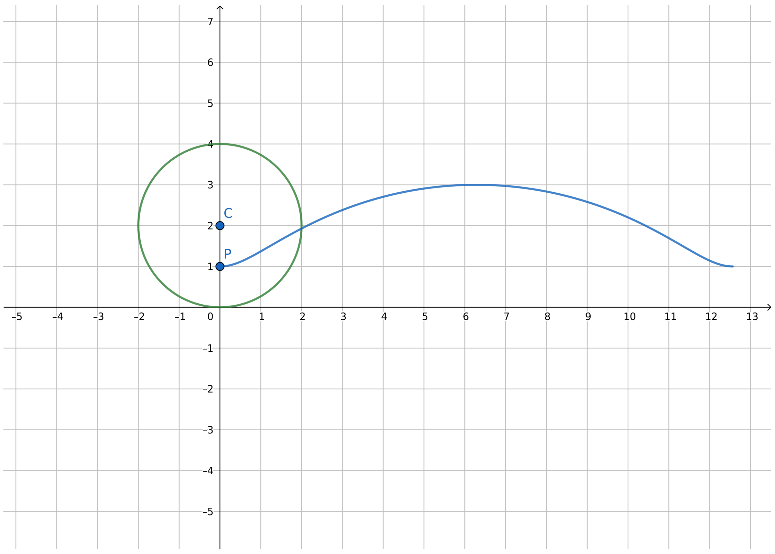
Logo, $\gamma'(t) = (\cos t, \dfrac{\cos t \operatorname{sen} t(\cos(t) - 4)}{(2 - \cos t)^2})$.

$\gamma'(t)$ é o vetor diretor da reta tangente a $\gamma(t)$. A reta tangente será horizontal quando $x'(t) \neq 0$ e $y'(t) = 0 \Rightarrow \dfrac{\cos t \operatorname{sen} t(\cos(t) - 4)}{(2 - \cos t)^2} = 0 \Rightarrow \cos t \operatorname{sen} t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = \pi$.

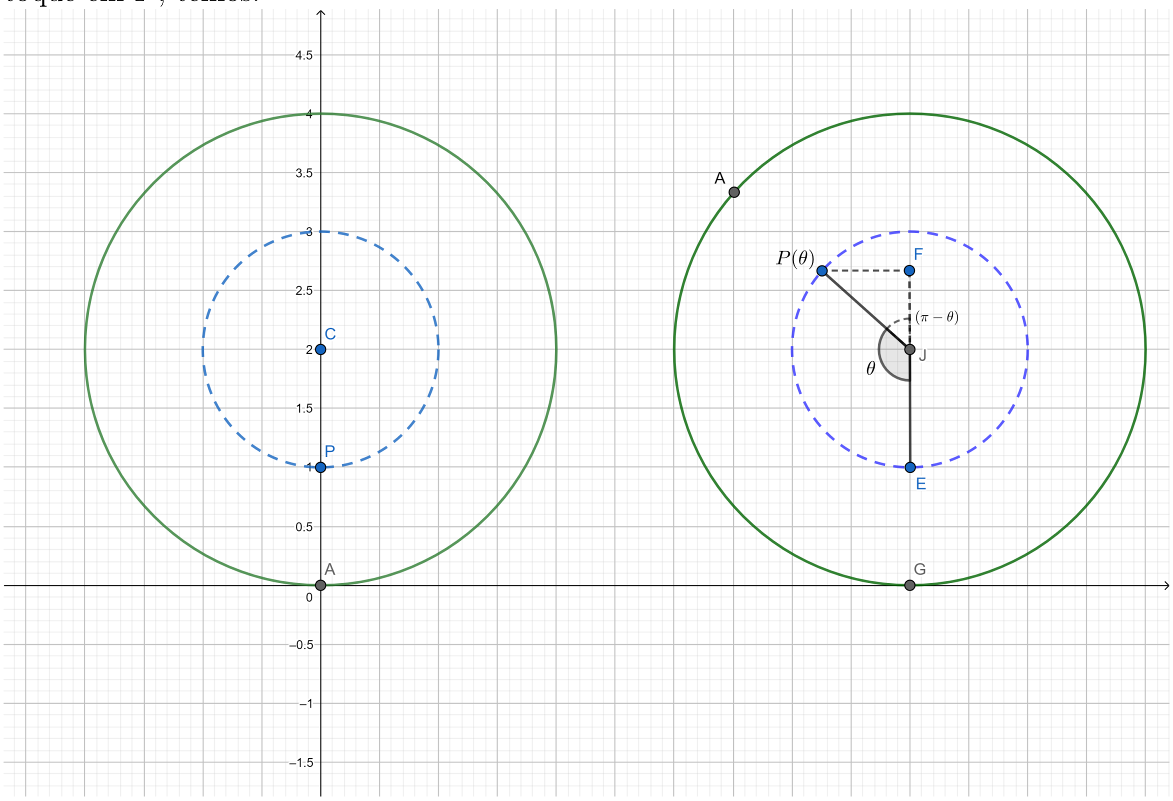
A reta tg será vertical quando $y'(t) \neq 0$ e $x'(t) = 0$. Como todos os pontos de $\gamma(t)$ que zeram $x'(t)$ também zeram $y'(t)$, concluímos que a curva não possui tangente vertical.

Logo, os pontos da curva que possuem reta tangente horizontal são: $\gamma(0) = (0, 1)$ e $\gamma(\pi) = (0, \dfrac{1}{3})$.

3. (2,0) Uma roda de raio 2 rola ao longo do eixo Ox sem deslizar. Encontre as equações paramétricas para a curva traçada pelo ponto P em um raio da roda a 1 unidade do seu centro C. (Sugestão: Utilize como parâmetro o ângulo θ através do qual a roda gira)



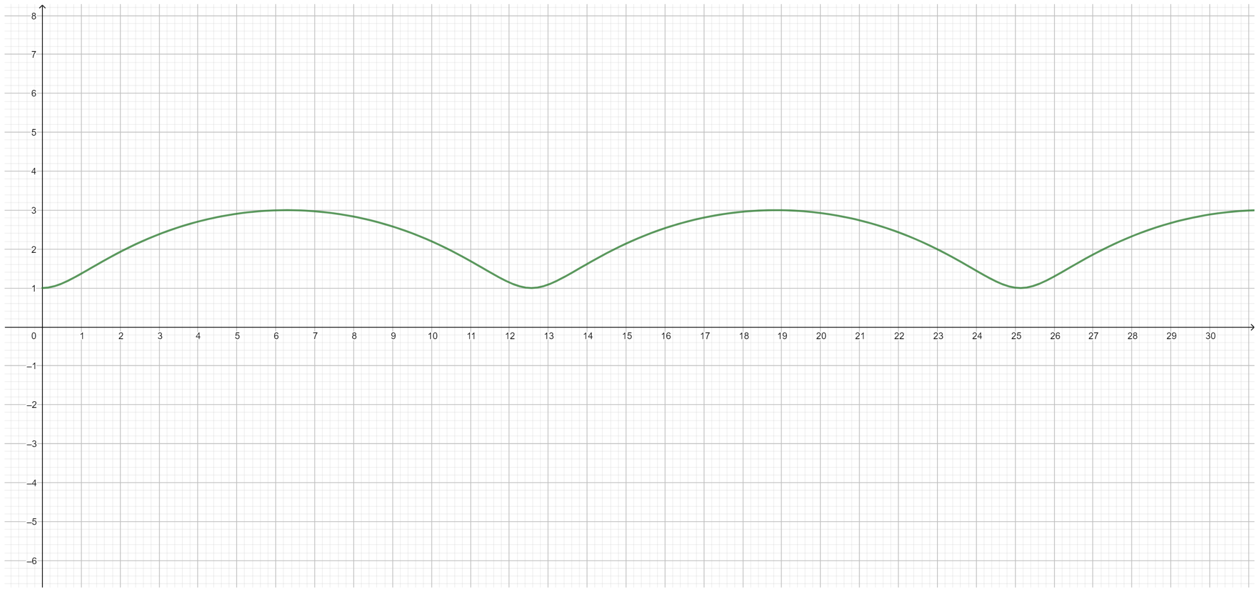
Resolução: Considerando uma circunferência com centro em C e raio = 1, de forma que toque em P, temos:



O deslocamento em x será: $\overline{AG} - \overline{P(\theta)F} \Rightarrow 2\theta - 1\,\text{sen}(\pi - \theta) = 2\theta - 1(\,\text{sen}\pi\cos\theta - \cos\pi\,\text{sen}\theta) = 2\theta - \,\text{sen}\theta$

O deslocamento em y será: $2 + \overline{JF} \Rightarrow 2 + 1\cos(\pi - \theta) = 2 + 1(\cos\pi\cos\theta + \,\text{sen}\pi\,\text{sen}\theta) = 2 - \cos\theta$.

Logo, a parametrização para o ponto P será: $P(\theta) = (2\theta - \,\text{sen}\theta, 2 - \cos\theta)$.


8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

4. (2,0) Considere a seguinte curva dada em coordenadas polares
$$r = \text{sen}^2(\theta) - cos(2\theta)$$

(a) Determine se a curva é simétrica em relação ao eixo pólar ou ao eixo y.

(b) Faça um esboço da curva.

Resolução:

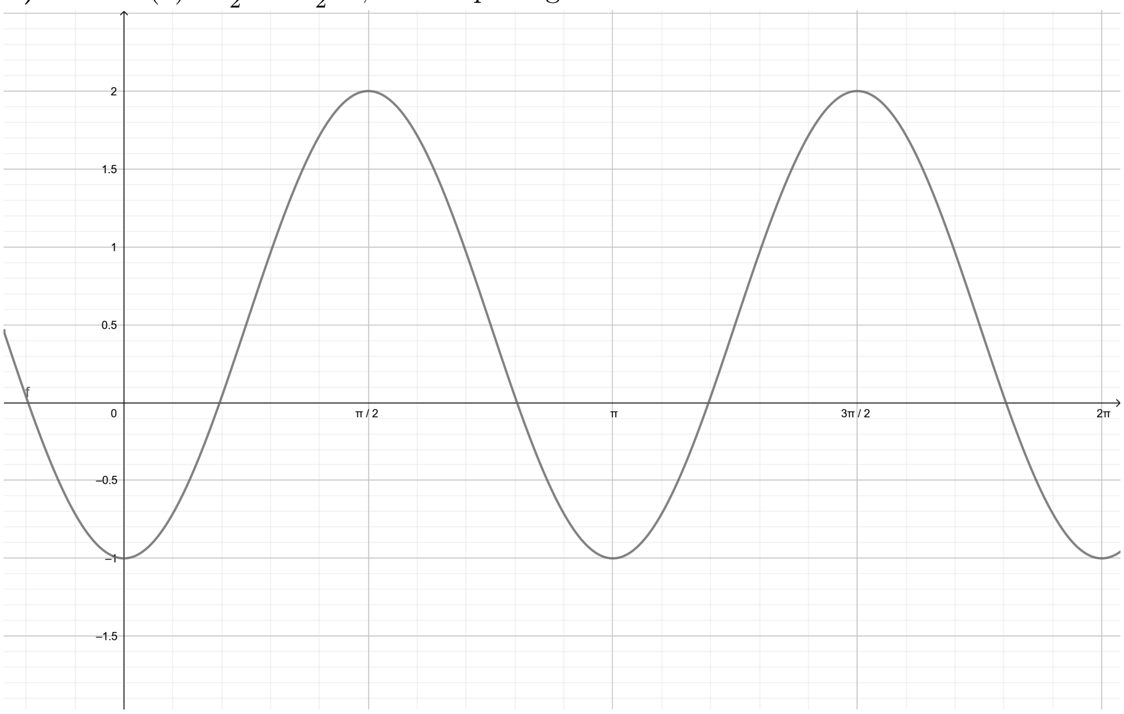
a) $r(\theta) = (\dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos 2\theta}{2}) - \cos 2\theta = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3\cos 2\theta}{2}$.

I: $r(\theta) \stackrel{?}{=} r(-\theta) \Rightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{3\cos 2\theta}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3\cos(-2\theta)}{2}$ pois $\cos 2\theta = cos(-2\theta)$.

II: $r(\theta) \stackrel{?}{=} r(\pi-\theta) \Rightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{3\cos 2\theta}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3\cos(2(\pi-\theta))}{2}$ pois $\cos(2(\pi-\theta)) = \cos(2\pi)\cos(2\theta) + \text{sen}(2\pi)\,\text{sen}(2\theta) = cos(2\theta)$.

De I concluímos que a curva é simétrica em relação ao eixo polar e de II concluímos que a curva é simétrica em relação ao eixo vertical (eixo y).

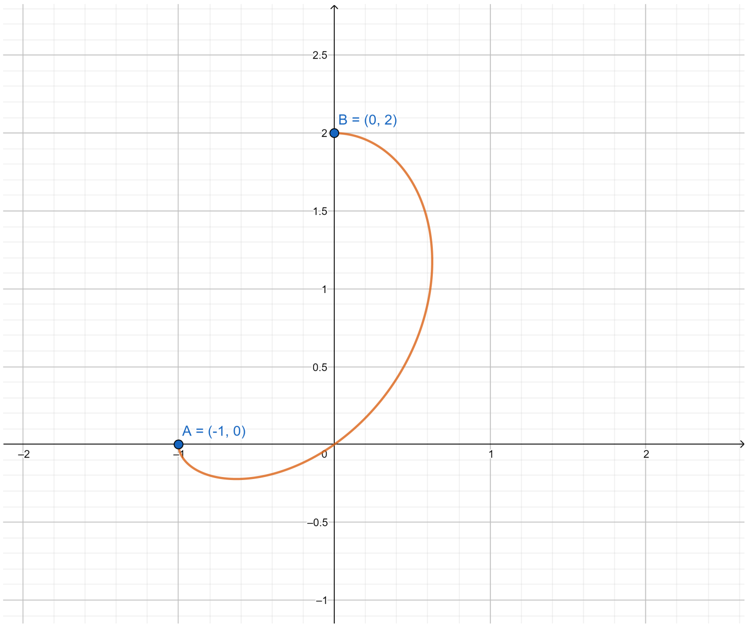
b) Sendo $r(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{3\cos 2\theta}{2}$, temos que o gráfico do raio r é:



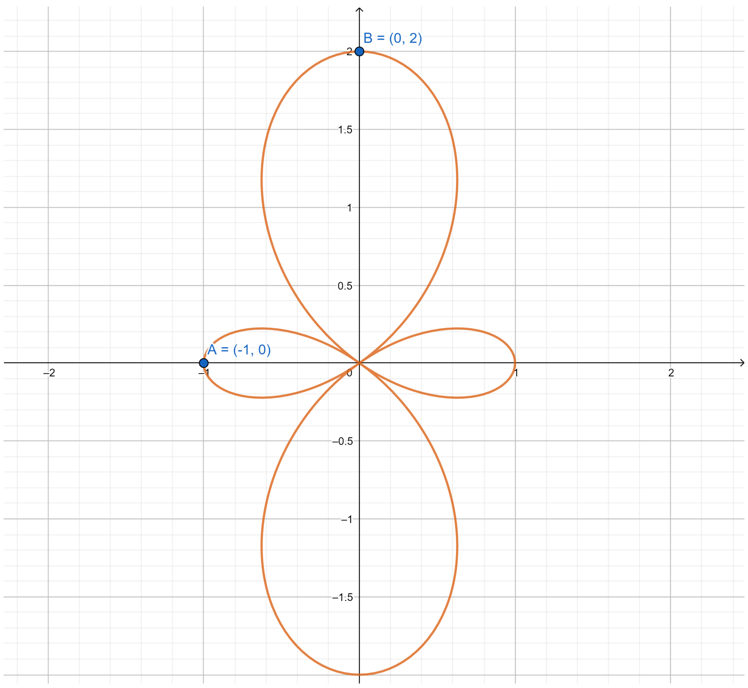
Percebe-se que o raio vai de -1 até 2 quando o θ varia de 0 até $\frac{\pi}{2}$. Sendo

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos\theta \\ y(\theta) = r\,\text{sen}\theta \end{cases} \tag{1}$$

Logo, a curva parte do ponto $\gamma(0) = (-1, 0)$ e vai até ponto $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 2)$ passando pela origem, conforme a representação:



Como a curva é simétrica em relação aos eixos horizontal e vertical, temos então,



5. (3,0) Considere as seguintes curvas dadas em coordenadas polares

$\mathcal{C}_1 : r = \sqrt{2}$

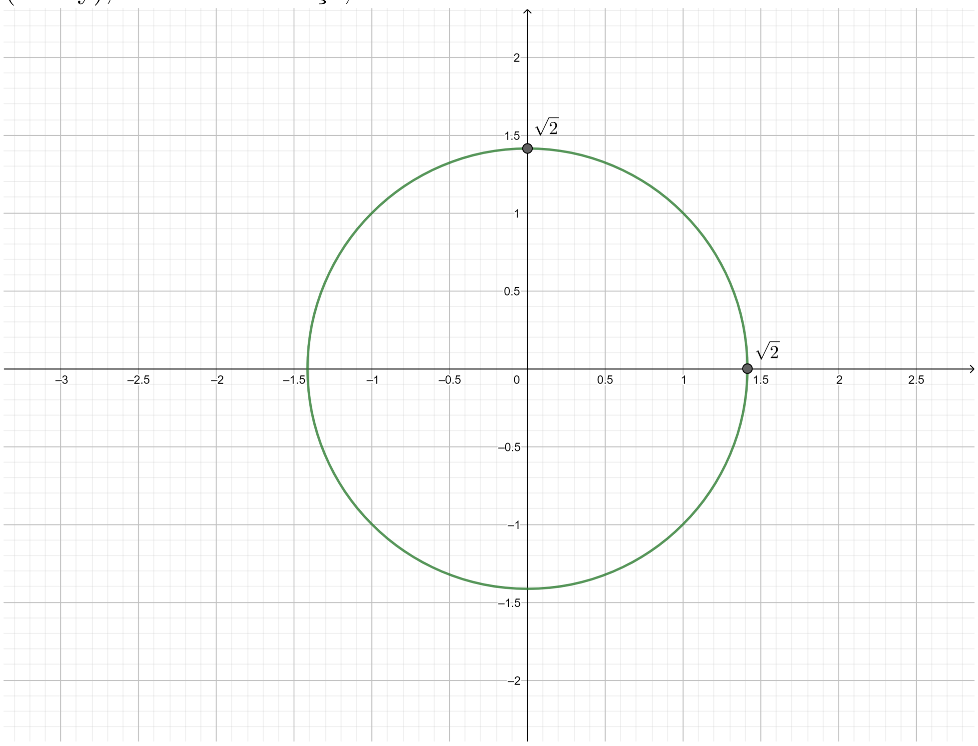
$\mathcal{C}_2 : r^2 = 4\,\text{sen}(2\theta)$

(a) Determine se as curvas são simétricas em relação ao eixo pólar ou ao eixo y. Faça um esboço de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

(b) Encontre a área da região dentro de $\mathcal{C}_2$ e fora de $\mathcal{C}_1$.

Resolução:

a) Curva C_1 : Como $r_1(\theta) = r_1(-\theta) = \sqrt{2}$ e $r_1(\theta) = r_1(\pi - \theta) = \sqrt{2}$, concluímos que a curva C_1 é simétrica tanto em relação ao eixo polar quanto em relação ao eixo vertical (eixo y), sendo seu esboço,



Curva $C_2 : r_2(\theta) = \pm\sqrt{4\,\text{sen}2\theta} \Rightarrow\ \text{sen}2\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi], k \in \mathbb{N}_+$

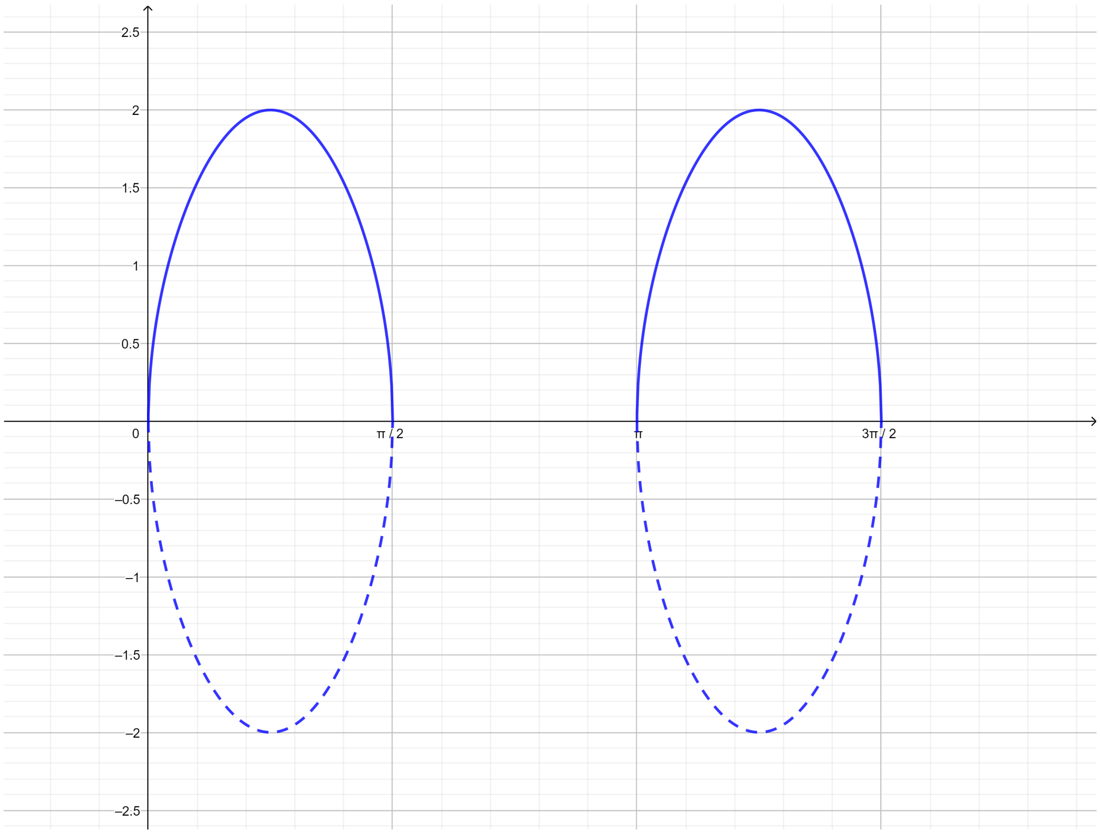
$I\ :\ r_2(\theta) \stackrel{?}{=} r_2(-\theta)$. Tomanddo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, temos o ponto da curva $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Porém, ao pegar $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$, temos que não existe um ponto correspondente na curva, pois $\theta = -\dfrac{\pi}{4} \notin [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi], k \in \mathbb{N}_+$. Logo, $r_2(\theta) \neq r_2(-\theta)$.

$II : r_2(\theta) \stackrel{?}{=} r_2(\pi - \theta)$. Tomanddo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, temos o ponto da curva $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Porém, ao pegar $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, temos que não existe um ponto correspondente na curva, pois $\theta = \dfrac{3\pi}{4} \notin [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi], k \in \mathbb{N}_+$. Logo, $r_2(\theta) \neq r_2(\pi - \theta)$.

$III\ :\ r_2(\theta) \stackrel{?}{=} r_2(\pi + \theta) \Rightarrow \sqrt{4\sin 2\theta} = \sqrt{4\sin(2(\pi + \theta))} \Rightarrow \sin 2\theta = \sin 2\pi \cos 2\theta + \sin 2\theta \cos 2\pi = \sin(2\theta)$.

De I e II consluímos que a curva C_2 não é simétrica em relação ao eixo polar nem em relação ao eixo y. De III concluímos que C_2 é simétrico em relação ao pólo.

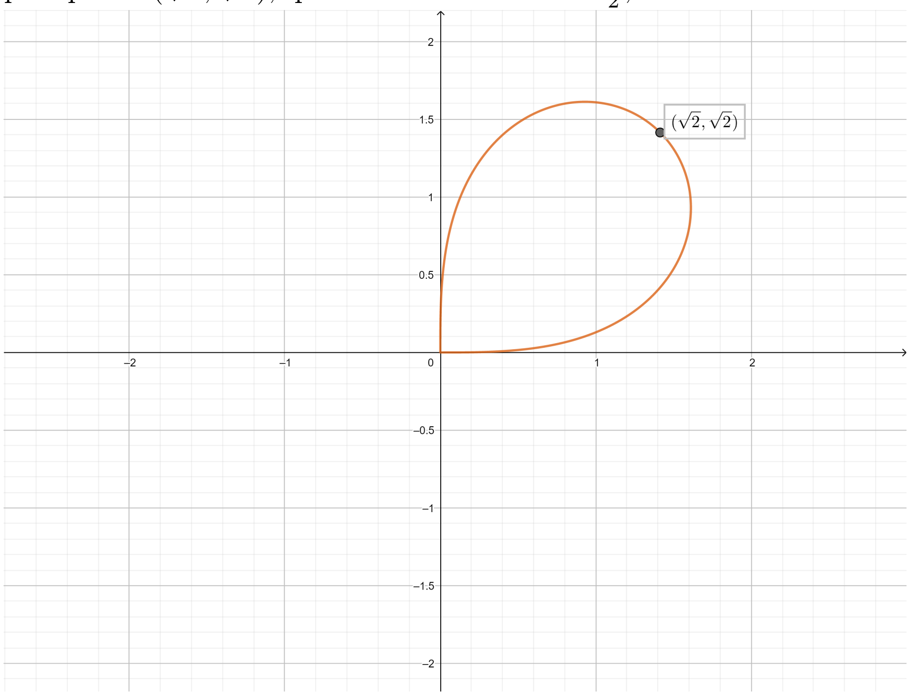
Conforme o gráfico do raio da curva C_2,



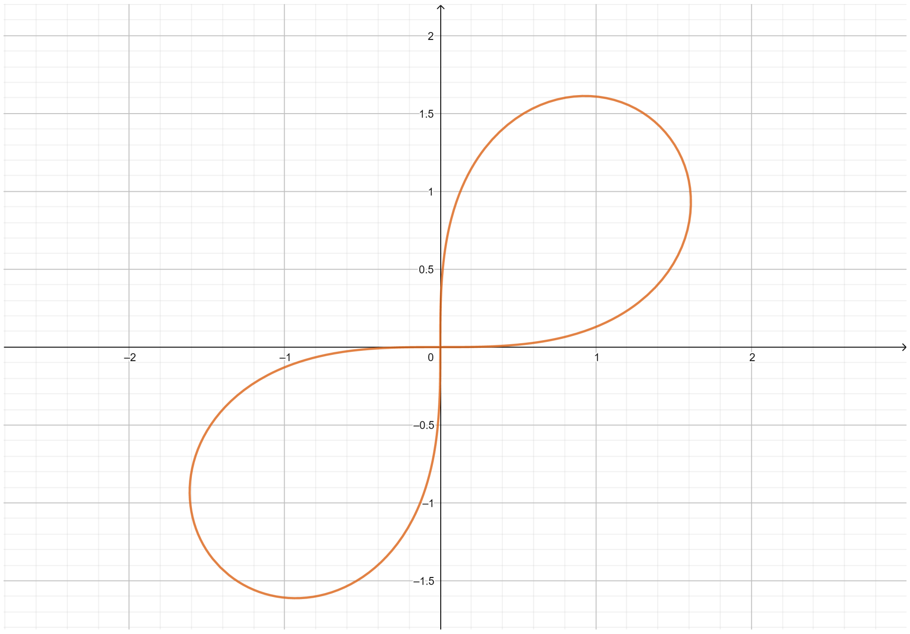
Percebe-se que o raio é 0 em $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. O raio é máximo, $r_2 = 2$, quando $\theta = \frac{\pi}{4}$. Sendo

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos\theta \\ y(\theta) = r\,\text{sen}\theta \end{cases} \tag{2}$$

Temos que $C_2(\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, então, a curva parte do $(0,0)$ e volta até o $(0,0)$ passando pelo ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, quando θ varia de 0 até $\frac{\pi}{2}$, ficando:

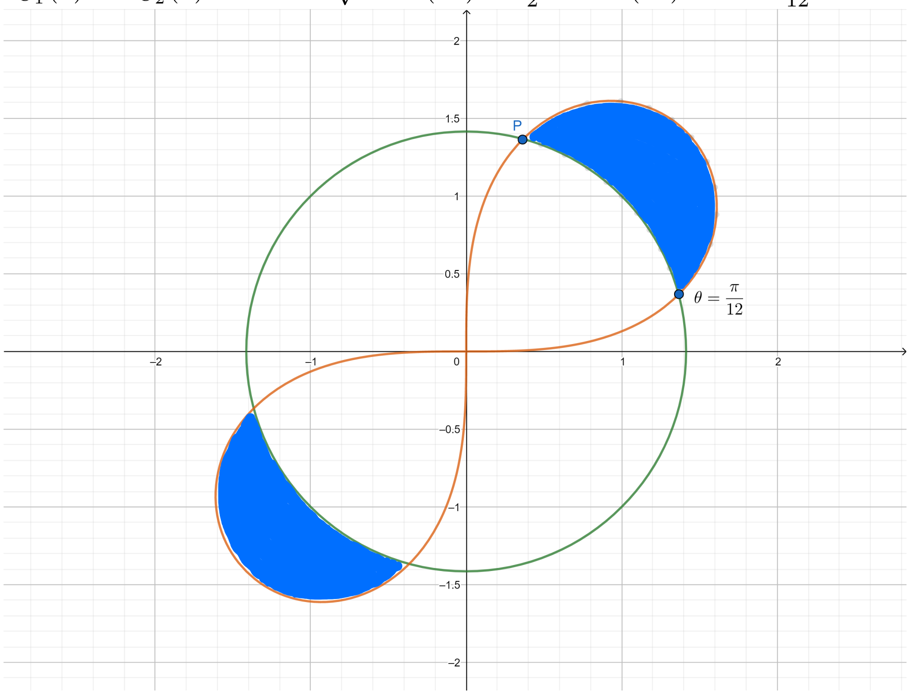


Pela simetria em torno do pólo, temos o esboço final,



b) $A = \int \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$

$r_{C_1}(\theta) = r_{C_2}(\theta) \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{4\,\text{sen}(2\theta)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \text{sen}(2\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}$



Pela representação da interseção dos gráficos, percebe-se dois pontos de interseção no primeiro quadrante. Logo, o $P_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \Rightarrow P_2 = \frac{5\pi}{12}$.

A área será 2 vezes a àrea hachurada no primeiro quadrante da imagem. Logo,

$A = 2\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{2}(4\sin(2\theta) - 2)d\theta = [-2\cos(2\theta) - 2\theta]|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$.

$1^{\underline{a}}$ Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Turma 22 - Noturno
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2022 - 02/05/2022$_B$
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Matheus de Souza Nunes

1. (1,5) Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = \left(e^t + e^{-t}, t - \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{4}\right)$, $t \in [0, 1]$.

Resolução:
$L(\gamma(t)) = \displaystyle\int_0^1 || \gamma'(t) || \, dt.$
$\gamma'(t) = (e^t - e^{-t}, 1 - \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}) \Rightarrow || \gamma'(t) || = \sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + (1 - \dfrac{e^{2t} + e^{2t}}{2})^2} =$
$\sqrt{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t} + 1 - e^{2t} - e^{-2t} + \dfrac{(e^{4t} + 2e^{2t}e^{-2t} + e^{-4t})^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{e^{4t} + e^{-4t} - 2}}{2} = \left| \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} \right|$
Logo, $L(\gamma(t)) = \displaystyle\int_0^1 \left| \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} \right| dt = \dfrac{1}{2} \int_0^1 e^{2t} - e^{-2t} dt = \dfrac{1}{2}[\dfrac{e^{2t}}{2} + \dfrac{e^{-2t}}{2}]|_0^1 =$
$\dfrac{1}{4}(e^2 + e^{-2} - 2) = \dfrac{(e - e^{-1})^2}{4}$

2. (1,5) Considere a curva parametrizada $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\cos t, \frac{\text{sen}^2 t}{2 - \text{sen}\, t}\right)$$

(a) Encontre as interseções da imagem de γ com os eixos.

(b) Determine $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Ache os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal ou vertical.

Resolução:

a) A curva intercepta o eixo y quando x(t) $= 0 \Rightarrow \cos(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ou $t = \frac{3\pi}{2}$.

A curva intercepta o eixo x quando y(t) $= 0 \Rightarrow \dfrac{\text{sen}^2 t}{2 - \text{sen} t} = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2 t = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = \pi$ ou $t = 2\pi$.

Logo, $\gamma(t)$ intercepta o eixo x em $\gamma(0) = (1, 0), \gamma(\pi) = (-1, 0)$ e $\gamma(2\pi) = (1, 0)$ e $\gamma(t)$ intercepta o eixo y em $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ e $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, \frac{1}{3})$.

b) $x'(t) = -\,\text{sen} t$.

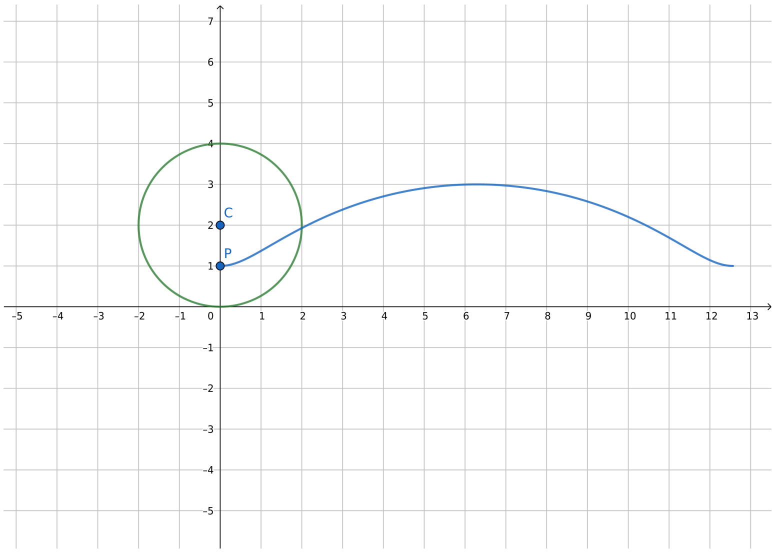
$y'(t) = \dfrac{2 \sin t \cos t(2 - \text{sen} t) - \text{sen}^2 t(-\cos t)}{(2 - \text{sen} t)^2} = \dfrac{\sin t \cos t(4 - \text{sen} t)}{(2 - \text{sen} t)^2}$.

Logo, $\gamma'(t) = (-\,\text{sen} t, \dfrac{\text{sen} t \cos t(4 - \text{sen} t)}{(2 - \text{sen} t)^2})$.

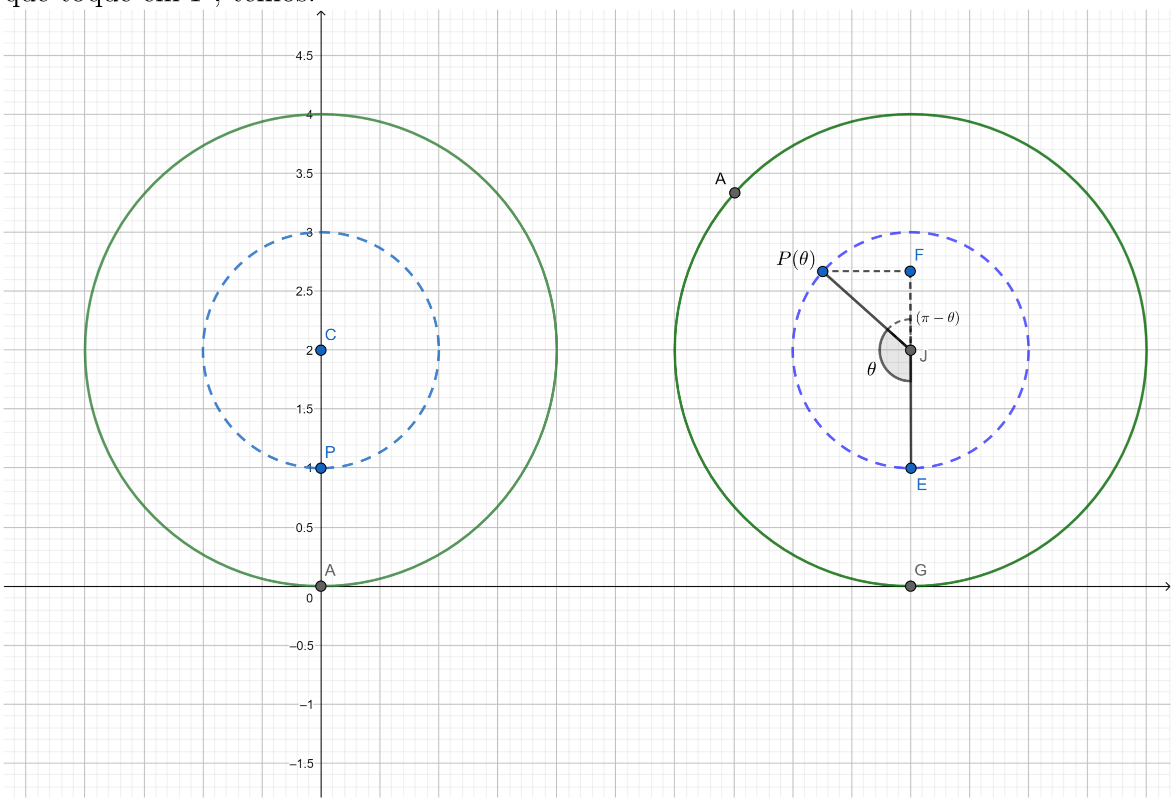
$\gamma'(t)$ é o vetor diretor da reta tangente a $\gamma(t)$. A reta tg será horizontal quando $x'(t) \neq 0$ e $y'(t) = 0 \Rightarrow \dfrac{\sin t \cos t(4 - \text{sen} t)}{(2 - \text{sen} t)^2} = 0 \Leftrightarrow \text{sen} t \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$ ou $t = \frac{3\pi}{2}$. A reta tg será vertical quando $y'(t) \neq 0$ e $x'(t) = 0$. Como todos os pontos de $\gamma(t)$ que zeram $x'(t)$ também zeram $y'(t)$, concluímos que a curva não possui tangente vertical.

Logo, os pontos da curva que possuem reta tangente horizontal são: $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ e $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, \frac{1}{3})$.

(a) (2,0) Uma roda de raio 2 rola ao longo do eixo Ox sem deslizar. Encontre as equações paramétricas para a curva traçada pelo ponto P em um raio da roda a 1 unidade do seu centro C. (Sugestão: Utilize como parâmetro o ângulo θ através do qual a roda gira)



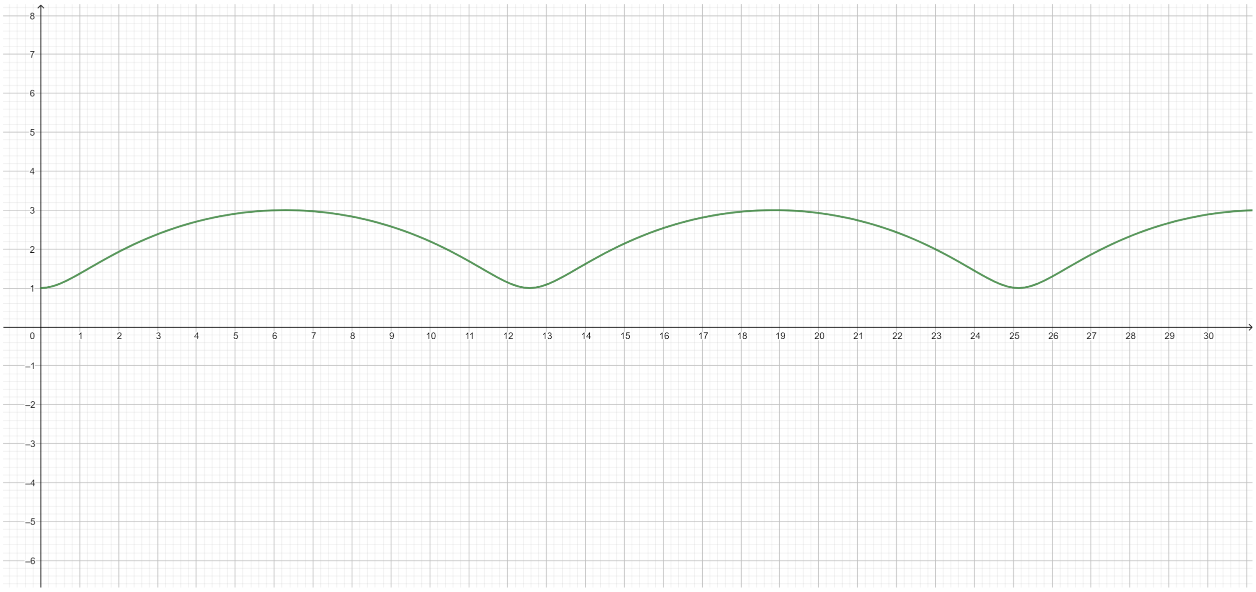
Resolução: Considerando uma circunferência com centro em C e raio $= 1$, de forma que toque em P, temos:



O deslocamnto em x será: $\overline{AG} - \overline{P(\theta)F} \Rightarrow 2\theta - 1\,\text{sen}(\pi-\theta) = 2\theta - 1(\,\text{sen}\pi\cos\theta - \cos\pi\,\text{sen}\theta) = 2\theta -\,\text{sen}\theta$

O deslocamento em y será: $2+\overline{JF} \Rightarrow 2+1\cos(\pi-\theta) = 2+1(\cos\pi\cos\theta + \,\text{sen}\pi\,\text{sen}\theta) = 2-\cos\theta$.

Logo, a parametrização para o ponto P será: $P(\theta) = (2\theta -\,\text{sen}\theta, 2-\cos\theta)$.


8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
−1
−2
−3
−4
−5
−6

3. (2,0) Considere a seguinte curva dada em coordenadas polares

$$r = cos(2\theta) + \cos^2(\theta)$$

(a) Determine se a curva é simétrica em relação ao eixo pólar ou ao eixo y.

(b) Faça um esboço da curva.

Resolução:

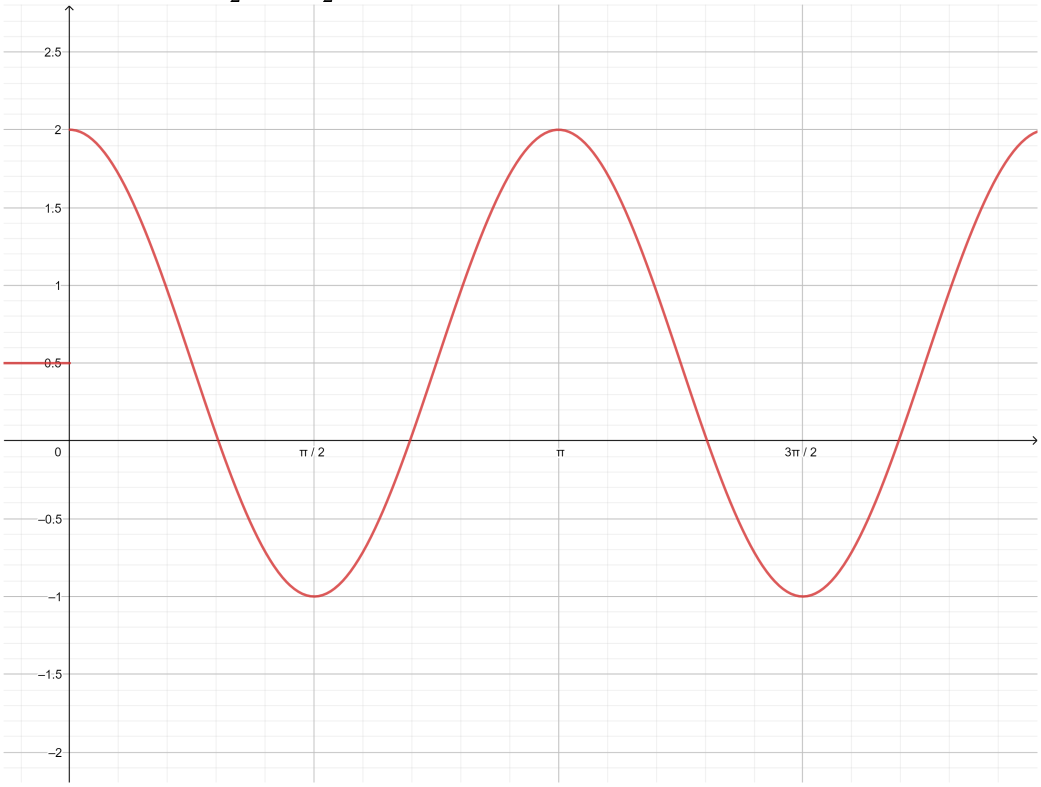
a) $r(\theta) = \cos(2\theta) + (1 - \sin^2\theta) = \cos 2\theta + (1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2\theta}{2}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\cos 2\theta}{2}$

I: $r(\theta) \overset{?}{=} r(-\theta) \Rightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\cos 2\theta}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\cos(-2\theta)}{2}$ pois $cos2\theta = cos(-2\theta)$.

II: $r(\theta) \overset{?}{=} r(\pi - \theta) \Rightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\cos(2\theta)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\cos(2(\pi-\theta))}{2}$ pois $\cos(2(\pi-\theta)) = \cos(2\pi)\cos(2\theta) + \text{sen}(2\pi)\,\text{sen}(2\theta) = cos(2\theta)$.

De I concluímos que a curva é simétrica em relação ao eixo polar e de II concluímos que a curva é simétrica em relação ao eixo vertical (eixo y).

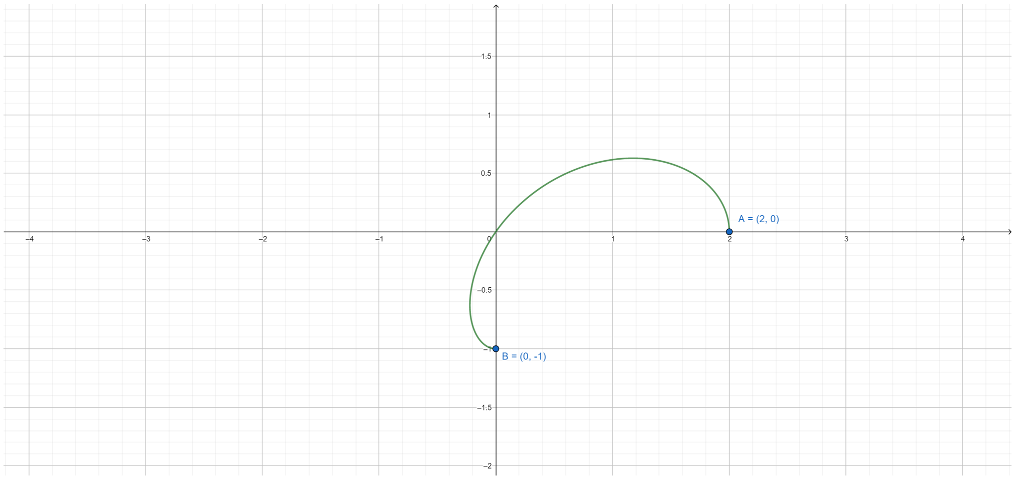
b) Sendo $r(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{3\cos(2\theta)}{2}$, temos que o gráfico do raio r é:



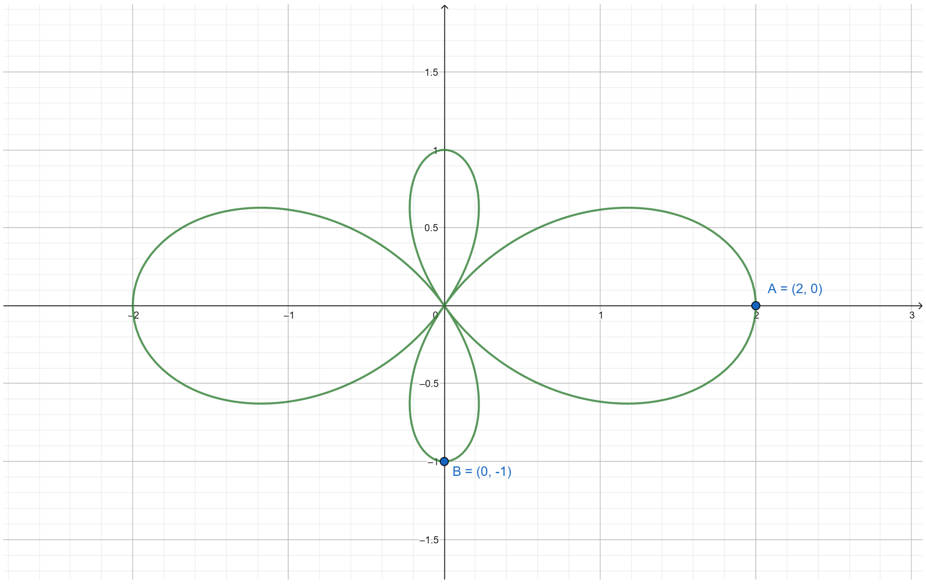
Peecebe-se que o raio vai de 2 até -1 quando o θ varia de 0 até $\frac{\pi}{2}$. Sendo

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos\theta \\ y(\theta) = r\,\text{sen}\theta \end{cases} \tag{3}$$

Logo, a curva parte do ponto $\gamma(0) = (2, 0)$ e vai até ponto $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, -1)$ passando pela origem, conforme a representação:



Como a curva é simétrica em relação aos eixos horizontal e vertical, temos então,



4. (3,0) Considere as seguintes curvas dadas em coordenadas polares

$\mathcal{C}_1 : r = \sqrt{3}$

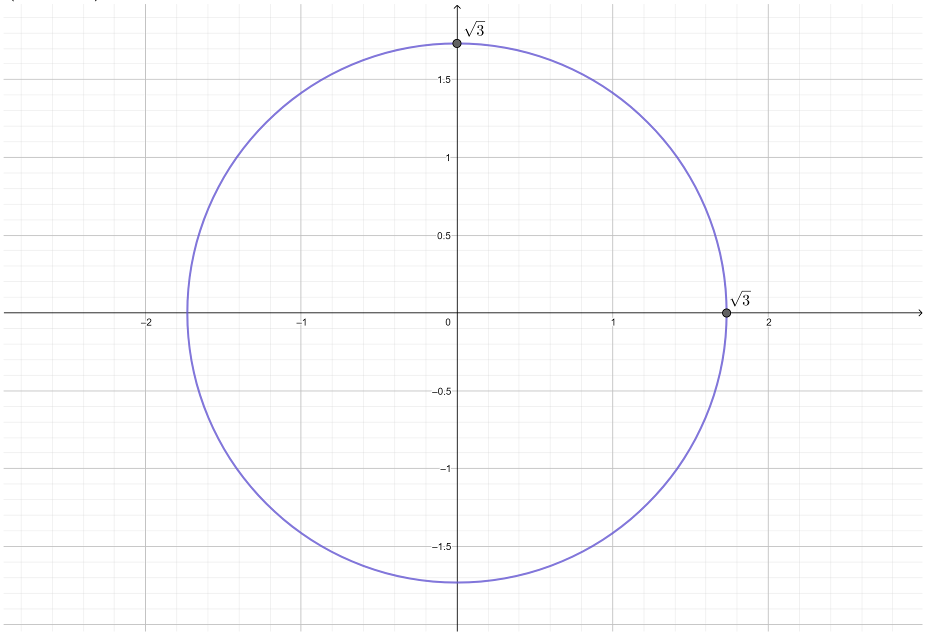
$\mathcal{C}_2 : r^2 = 6\,\text{sen}(2\theta)$

(a) Determine se as curvas são simétricas em relação ao eixo pólar ou ao eixo y. Faça um esboço de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

(b) Encontre a área da região dentro de $\mathcal{C}_2$ e fora de $\mathcal{C}_1$.

Resolução:

a) Curva C_1 : Como $r_1(\theta) = r_1(-\theta) = \sqrt{3}$ e $r_1(\theta) = r_1(\pi - \theta) = \sqrt{3}$, concluímos que a curva C_1 é simétrica tanto em relação ao eixo polar quanto em relação ao eixo vertical (eixo y), sendo seu esboço,



Curva $C_2 : r_2(\theta) = \pm\sqrt{6\,\text{sen}2\theta} \Rightarrow \text{sen}2\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi], k \in \mathbb{N}_+$

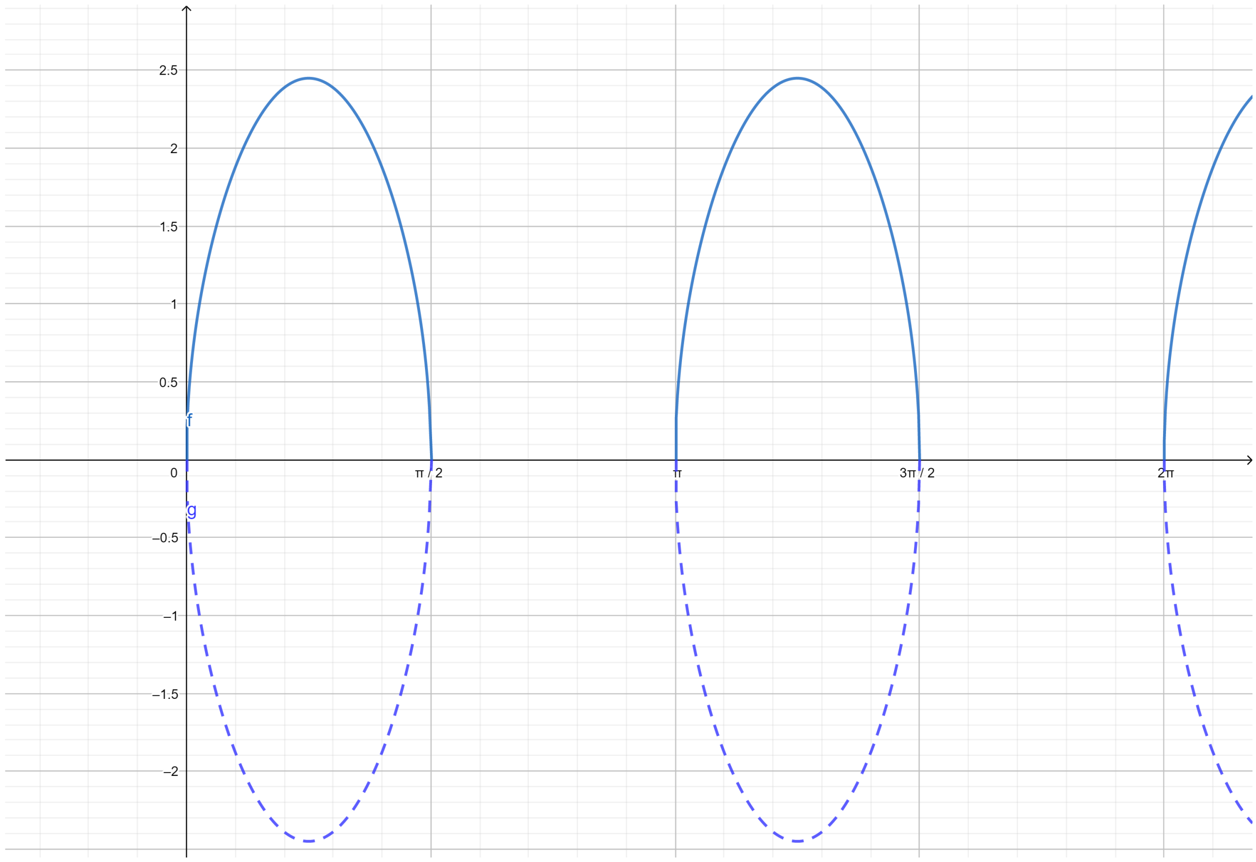
$I : r_2(\theta) \stackrel{?}{=} r_2(-\theta)$. Tomanddo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, temos o ponto da curva $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Porém, ao pegar $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$, temos que não existe um ponto correspondente na curva, pois $\theta = -\dfrac{\pi}{4} \notin [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi], k \in \mathbb{N}_+$. Logo, $r_2(\theta) \neq r_2(-\theta)$.

$II : r_2(\theta) \stackrel{?}{=} r_2(\pi - \theta)$. Tomanddo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, temos o ponto da curva $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Porém, ao pegar $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, temos que não existe um ponto correspondente na curva, pois $\theta = \dfrac{3\pi}{4} \notin [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi], k \in \mathbb{N}_+$. Logo, $r_2(\theta) \neq r_2(\pi - \theta)$.

$III : r_2(\theta) \stackrel{?}{=} r_2(\pi + \theta) \Rightarrow \sqrt{6\sin 2\theta} = \sqrt{6\sin(2(\pi + \theta))} \Rightarrow \sin 2\theta = \sin 2\pi \cos 2\theta + \sin 2\theta \cos 2\pi = \sin(2\theta)$.

De I e II concluímos que a curva C_2 não é simétrica em relação ao eixo polar nem em relação ao eixo y. De III concluímos que C_2 é simétrica em relação ao pólo.

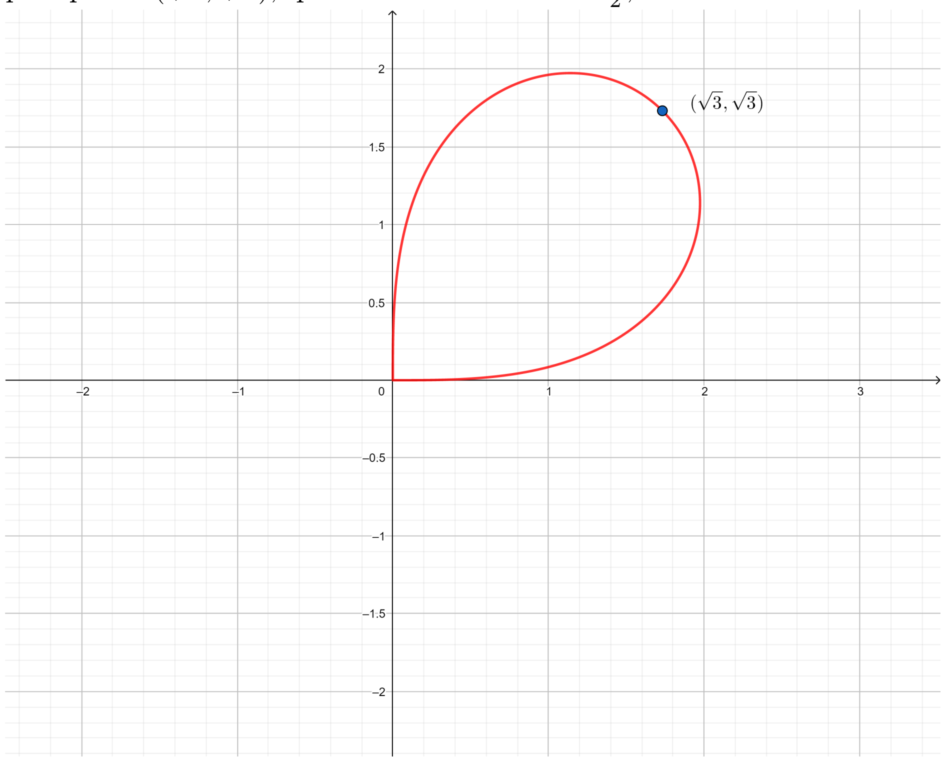
Conforme o gráfico do raio da curva C_2,



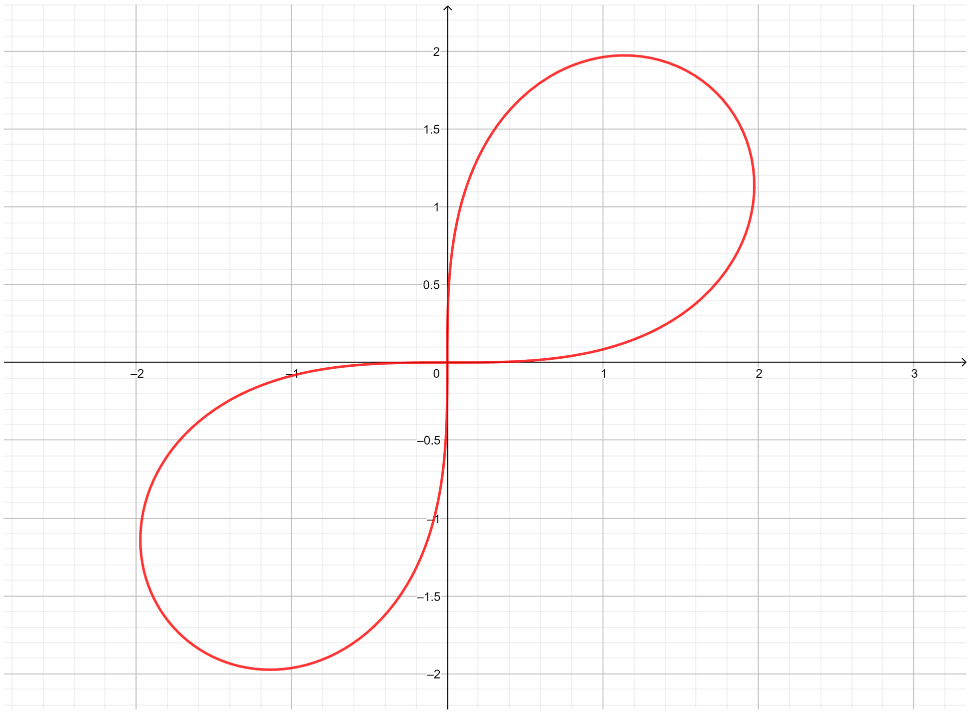
Percebe-se que o raio é 0 em $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. O raio é máximo, $r_2 = \sqrt{6}$, quando $\theta = \frac{\pi}{4}$. Sendo

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos\theta \\ y(\theta) = r\,\mathrm{sen}\theta \end{cases} \tag{4}$$

Temos que $C_2(\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$, então, a curva parte do $(0,0)$ e volta até o $(0,0)$ passando pelo ponto $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, quando θ varia de 0 até $\frac{\pi}{2}$, ficando:

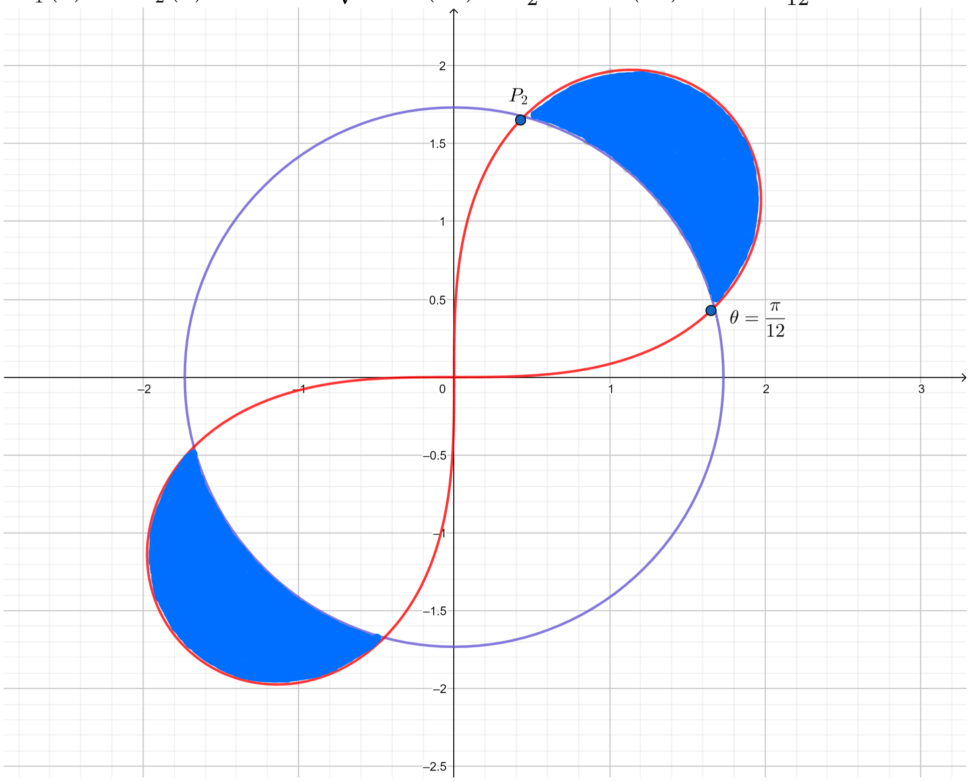


Pela simetria em torno do pólo, temos o esboço final,



b) $A = \int \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$

$r_{C_1}(\theta) = r_{C_2}(\theta) \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{6\,\mathrm{sen}(2\theta)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \mathrm{sen}(2\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}$



Pela representação da interseção dos gráficos, percebe-se dois pontos de interseção no primeiro quadrante. Logo, o $P_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \Rightarrow P_2 = \frac{5\pi}{12}$.

A área será 2 vezes a àrea hachurada no primeiro quadrante da imagem. Logo,

$A = 2\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{2}(6\sin(2\theta) - 3)d\theta = [-3\cos(2\theta) - 3\theta]|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{15\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = 3\sqrt{3} - \pi.$