MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Prova Substitutiva

Prof. Wilson Cuellar

24/06/2019

1. (3,0) Considere a função de duas variáveis $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

   (a) Determine e esboce o domínio de f.

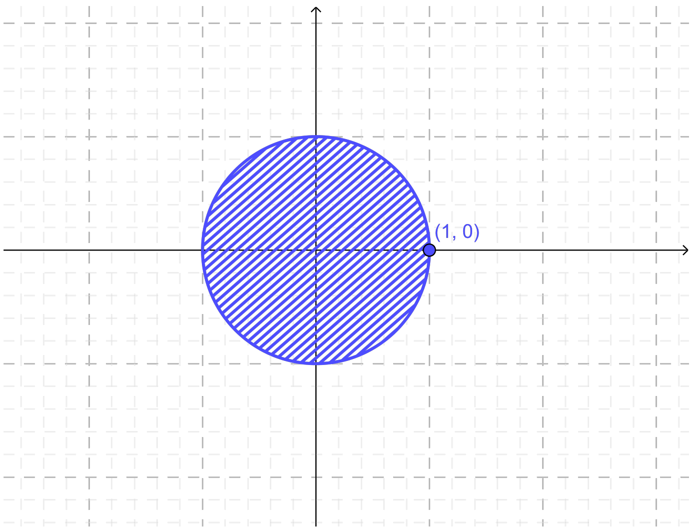
   (b) Determine e esboce a intersecção do gráfico de f com os planos xz e yz.

   (c) Determine e esboce as curvas de nível 0, $\frac{1}{2}$, 1 de f.

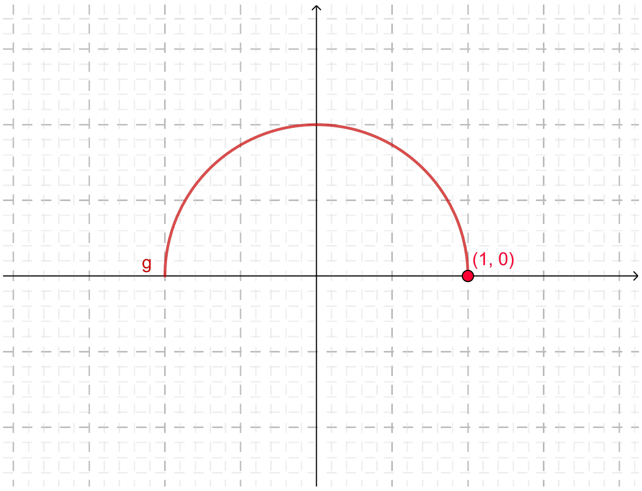
   (d) Esboce o gráfico de f.

Resolução:

(a) A função está definida quando $1 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqslant 1$, isto é, o domínio $Dom(f)$ é dado pelos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ na borda ou no interior da circunferência de raio 1 e centro $(0,0)$.



(b) O gráfico de f intercepta o plano xz quando $y = 0$ e temos que $f(x,0) = \sqrt{1 - x^2}$. Ou seja, a intersecção com o plano xz é dada pelo gráfico de $g(x) \doteq f(x,0)$ onde $(x,0) \in Dom(f) \Leftrightarrow x \in [-1,1]$. E temos que $g(x)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow g(x)^2 + x^2 = 1$. Isto é, temos que o gráfico da função é dado por uma semicircuferência (repare que $g(x) \geqslant 0$).



Para a intersecção com o plano yz, temos que $x = 0$ e, portanto, ela é dada como o gráfico de $f(0, y) = \sqrt{1 - y^2}$. Assim, y, nesse caso, faz um papel completamente análogo ao do x no caso acima e o gráfico da intersecção com o plano yz é idêntico ao anterior, com exceção de que o eixo horizontal seria, na verdade, o eixo dos valores de y.

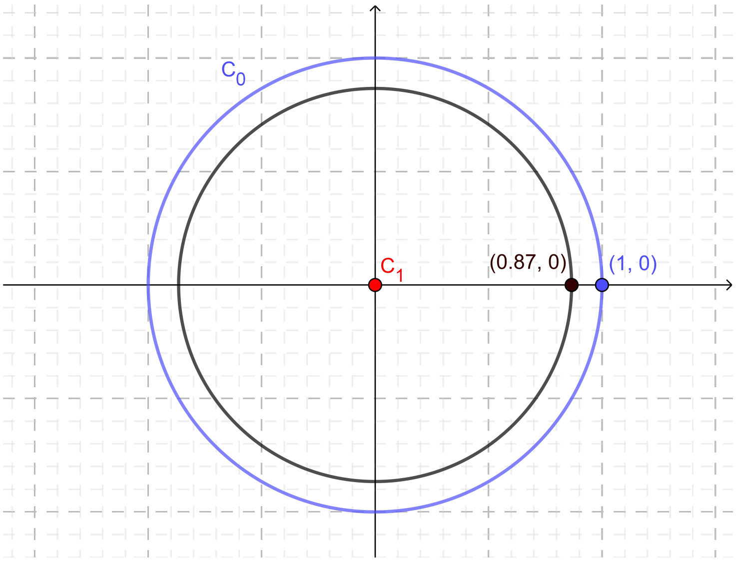
(c) Cada curva de nível é dada por um valor da função:

(a) $f = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$;

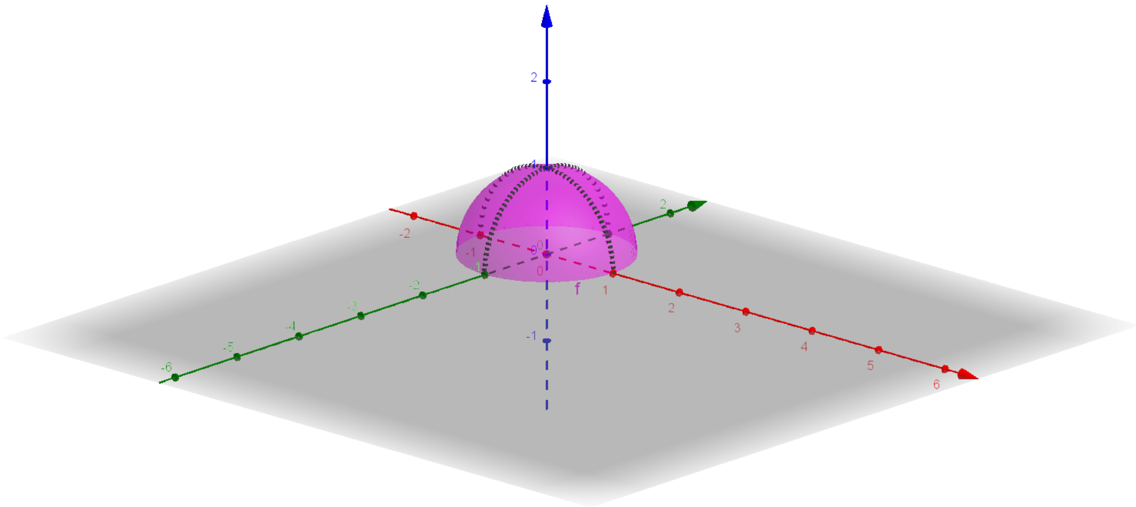
(b) $f = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$;

(c) $f = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Ou seja, são circunferências de raio 1 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e o ponto $(0, 0)$.



(d) Assim, podemos traçar um esboço da f (é uma semi-esfera).



2. (2,0) Em cada caso abaixo calcule o limite se existir, ou mostre que o limite não existe. Justifique sua resposta.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

Resolução: a) Repare que, ao tomarmos a curva $\gamma(t) = (0,t)$, onde $\gamma(t) \to (0,0) \Leftrightarrow t \to 0$ (isto é, o caminho pela reta $x = 0$), temos: $\displaystyle\lim_{\gamma(t)\to(0,0)} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot t^3}{0^2+t^6} = 0$. E, escolhendo $\alpha(t) = (t^3, t)$, onde $\alpha(t) \to (0,0) \Leftrightarrow t \to 0$ (o caminho pela curva $x^3 = y$), temos: $\displaystyle\lim_{\alpha(t)\to(0,0)} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\cdot t^3}{(t^3)^2+t^6} = \lim_{t\to 0}\frac{t^6}{2t^6} = \frac{1}{2}$.

Assim, $\displaystyle\lim_{\gamma(t)\to(0,0)} f(\gamma(t)) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{\alpha(t)\to(0,0)} f(\alpha(t))$ e, portanto, não existe o limite.

b) Para esse caso, podemos realizar uma substituição para facilitar as contas (e aplicarmos L'Hospital!): pode-se ver que, denotando $z = x^2+y^2$, temos que $z \to 0 \Leftrightarrow (x,y) \to (0,0)$ e, portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sqrt{z+1}-1}$.

Assim, temos um limite da forma $\dfrac{0}{0}$ e podemos aplicar L'Hospital: $(z)' = 1$ e $(\sqrt{z+1}-1)' = \dfrac{1}{2\sqrt{z+1}}$, segue que $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sqrt{z+1}-1} = \lim_{z\to 0}\frac{1\cdot 2\sqrt{z+1}}{1} = 2$.

Logo, o limite existe e é igual a 2.

3. (3,0) Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) f é diferenciável em $(0,0)$?

(d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em (0,0)?

Resolução:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x.\dfrac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$, onde foi usado o seguinte confronto $x\to 0$ e $0\leq x^2\leq x^2+y^2 \Rightarrow 0\leq \frac{x^2}{x^x+y^2}\leq 1$. Logo, f é contínua em $(0,0)$.

(b) Para $(x,y)=(0,0)$:

i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h+0,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1;$

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0,h+0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0.$

(c) Usemos a definição:
f é diferenciável em $(0,0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

Assim, já que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ e $f(0,0)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, o limite é dado por $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{\dfrac{h^3}{h^2+k^2}-1\cdot h}{\sqrt{h^2+k^2}}=$ $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{-hk^2}{h^2+k^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{-hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Pode -se ver que esse limite não tem valor nulo pelo caminho $(h,k)=(t,t)=\gamma(t)$ (ié, o caminho onde $h=k$), porque, por esse caminho, temos que o limite nos dá o valor $\lim_{t\to 0}\dfrac{-t^3}{(2t^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{t\to 0}\dfrac{-t^3}{2t^3}=-\dfrac{1}{2}\neq 0.$

Concluimos, assim, que a função não é diferenciável em $(0,0)$.

(d) Temos como resultado que, se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ fossem contínuas, então f seria diferenciável em $(0,0)$. Mas, como este último não acontece, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ não são ambas contínuas em $(0,0)$.

Obs.: Pode-se ver, inclusive, que nenhuma delas é contínua, pois, para $(x, y) \neq (0, 0)$, temos:

i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{3x^2(x^2 + y^2) - x^3(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{x^3 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$;

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{0 \cdot (x^2 + y^2) - x^3(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{-2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$.

E tomando o caminho $(x, y) = \gamma(t) = (t, t)$ (ié, pela reta $x = y$), pode-se ver que as duas funções tendem, respectivamente, aos valores $\dfrac{3}{4}$ e $-\dfrac{1}{2}$, que são diferentes de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

4. (2,0) Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com $27cm^2$ de papelão.

Resolução:

Nosso objetivo é maximizar a função $V(x,y,z) = xyz$ com a restrição $g(x,y,z) = 2xy + 2xz + yz = 27$. Aqui assumi que x é a medida da altura da caixa e que y,z são as medidas de comprimento e largura da base da caixa e podemos assumir que $x,y,z > 0$.

Pela regra de multiplicadores de Lagrange, sabemos que, se (x,y,z) é ponto de mín. ou máx., então $\nabla V(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, então: $(yz, xz, xy) = \lambda(2y+2z, 2x+z, 2x+y)$, isso quer dizer que esses dois vetores são l.d. (linearmente dependentes), então o produto vetorial é o vetor nulo: $(yz, xz, xy) \times (2y+2z, 2x+z, 2x+y) = (0,0,0) \Rightarrow$
$(xz(2x+y) - xy(2x+z), xy(2y+2z) - yz(2x+y), yz(2x+z) - xz(2y+2z)) = (0,0,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(2xz + yz - 2yx - yz) = 0 \\ y(2xy + 2xz - 2xz - yz) = 0 \\ z(2xy + zy - 2xy - xz) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xz - 2yx = 0 \\ 2xy - yz = 0 \\ zy - 2xz = 0 \end{cases} \Rightarrow y = z = 2x \text{ (já que } x,y,z \neq 0).$$

Logo, voltando à equação $2xy + 2xz + yz = 27$, temos que, para o volume ser máximo, $12x^2 = 27 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$. Logo, a caixa deve ter altura $\dfrac{3}{2}$ e base quadrada de dimensão 3.

Boa prova!