3ª Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Licenciatura Física e Matemática - Diurno
1º semestre de 2019 - 17/06/2019$_A$
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Guilherme da Costa Cruz

1. (2,0)

   (a) Seja r a reta tangente à curva $y^2 + 2x^2 - 2\text{sen}(x - y) = 3$ no ponto $(1, 1)$. Determine a equação da reta r.

   (b) Determine os pontos da curva de nível $x^2 + xy + y^2 = 1$ cuja reta tangente seja paralela à reta r do item anterior.

Resolução: a) Como a reta r passa pelo ponto $(1, 1)$, se (x, y) é outro ponto qualquer da reta, temos que o vetor $(x - 1, y - 1)$ é vetor diretor da reta e , pontanto, tangente à curva dada por $f(x, y) = y^2 + 2x^2 - 2\text{sen}(x - y) = 3$. Assim, vale que $\nabla f(x, y) =$
$= (4x - 2\cos(x - y), 2y + 2\cos(x - y))$ é perpendicular, no ponto $(1, 1)$, ao vetor diretor, então:
$\nabla f(1, 1).(x - 1, y - 1) = 0 \Leftrightarrow (4 - 2, 2 + 2).(x - 1, y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$x + 2y = 3 \Leftrightarrow y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$. Logo, as duas últimas equações são equações da reta r.

b) Seja (a, b) fixado um ponto da curva de nível $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 1$, então, do mesmo modo que acima, podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em (a, b) pela equação $\nabla g(a, b).(x - a, y - b) = 0$, onde $\nabla g(a, b) = (2a + b, a + 2b)$, então:
$(2a + b)(x - a) + (a + 2b)(y - b) = 0 \Rightarrow x(2a + b) + y(a + 2b) - 2(a^2 + ab + b^2) = 0$, repare que $(a^2 + ab + b^2) = g(a, b) = 1$, pois (a, b) pertence à curva, então a equação da reta é dada por $x(2a + b) + y(a + 2b) = 2$.

E, para que essa reta seja paralela à reta r, devemos ter $\dfrac{2a + b}{1} = \dfrac{a + 2b}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a + 2b = a + 2b \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow g(0, b) = b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$ ou $b = -1$. Logo, os pontos da curva que satisfazem o enunciado são: $(a, b) = (0, -1)$ ou $(a, b) = (0, 1)$.

2. (2,0) Seja $f(x,y) = x^3y^2 + ax^2 + bx$, onde a, b são constantes reais. Determine os valores de a e b que fazem do ponto $P = (1,0)$ um ponto de sela de f.

Resolução:

Uma condição necessária para que $(1,0)$ seja ponto de sela é que $(1,0)$ seja ponto crítico, isto é, $\nabla f(1,0) = (0,0)$, onde $\nabla f(x,y) = (3x^2y^2 + 2ax + b, 2x^3y) \Rightarrow \nabla f(1,0) = (2a+b, 0)$. Assim, devemos ter $(2a+b,0) = (0,0) \Rightarrow b = -2a$.

Lembremos, também, que, se a hessiana $H(1,0)$ for estritamente negativa, então teremos um ponto de sela. Calculemos ela: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2 + 2a \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2a = -b$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2y \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x^3 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 2$

$\therefore H(1,0) = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4a = -2b$. Assim, $H(1,0) < 0 \Leftrightarrow a < 0$.

Logo, se $a < 0$ e $b = -2a$, então $(1,0)$ será ponto de sela.

Obs.: Repare que, se $a > 0$, teríamos, pela hessiana, que $(1,0)$ seria de mínimo local e, se $a = 0$, então $f(x,y) = x^3y^2$ e $(1,0)$ também seria mínimo local (não estrito) (porque, para todo (x,y) na bola de centro $(1,0)$ e raio $1/2$, teríamos que $0 = f(1,0) \leqslant f(x,y)$). Assim, os valores de a e b que satisfazem as condições acima são os únicos que tornam $(1,0)$ ponto de sela.

3. (3,0) Encontre os pontos da elipse $x^2+xy+y^2=3$ mais próximos e mais distantes da origem.

Resolução:

Devemos encontrar os (x,y) que são restritos a $g(x,y)=x^2+xy+y^2=3$ e que tornam a função $d(x,y)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$ máxima ou mínima, o que é o mesmo que encontrar os pontos de máximo e mínimo de $f(x,y)=x^2+y^2$ (pois a função raiz quadrada é crescente) que satisfazem $g(x,y)=3$. Pela regra de multiplicadores de Lagrange, sabemos que, se (x_0,y_0) é ponto de mín. ou máx. local, então $\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0), \lambda\in\mathbb{R}$, então:
$(2x_0,2y_0)=\lambda(2x_0+y_0,2y_0+x_0)$, onde $(x_0=0$ ou $y_0=0)\Rightarrow x_0=y_0=0$ e $g(0,0)=0\neq 3$, então $x_0\neq 0\neq y_0$ e segue que $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{2x_0+y_0}{2x_0}=\dfrac{2y_0+x_0}{2y_0}\Rightarrow 4x_0y_0+2x_0^2=4x_0y_0+2y_0^2\Rightarrow$ $x_0^2=y_0^2\Rightarrow x_0=y_0$ ou $x_0=-y_0$:

(a) Se $x_0=y_0$: $g(x_0,y_0)=3x_0^2=3\Rightarrow x_0=\pm 1$.

(b) Se $x_0=-y_0$: $g(x_0,y_0)=x_0^2=3\Rightarrow x_0=\pm\sqrt{3}$.

Assim, vendo que $f(1,1)=f(-1,-1)=2$ e $f(-\sqrt{3},\sqrt{3})=f(\sqrt{3},-\sqrt{3})=6>2$, temos que $(1,1)$ e$(-1,-1)$ são os pontos de mínimo, isto é, os mais próximos da origem; e $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ e $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ são os de máximo, isto é, os mais distantes.

4. (3,0) Seja $f(x,y) = xy^2$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$.

   (a) Justifique a existência de valor máximo e mínimo de f em D.

   (b) Encontre os pontos críticos de f no interior de D.

   (c) Encontre os valores máximo e mínimo de f em D.

Resolução:

(a) A função f é contínua e D é um conjunto limitado e fechado (como $D \subset \mathbb{R}^2$, podemos chamá-lo de compacto), então, pelo Teorema de Weirstrass, f possui valor de máximo e de mínimo.

(b) (x,y) é pontos crítico no interior de $D \Leftrightarrow \nabla f(x,y) = (y^2, 2xy) = (0,0)$ e $x^2 + y^2 < 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ x^2 + y^2 < 3 \end{array}\right\}$. Logo, os pontos críticos são os $(x,0)$ tal que $x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

(c) Vejamos os máximos e mínimos na fronteira, isto é, para (x,y) que satisfazem
$x^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = 3 - x^2$, então, na fronteira, a função é dada por:
$f(x,y) \doteq g(x) = x(3 - x^2)$, $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Estudando essa função, chega-se que o máximo dela é 2 e ocorre quando $x = 1$ e o mínimo é -2, quando $x = -1$. Por exemplo, pode-se reparar $g'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ e que $g(\pm\sqrt{3}) = 0$.

Assim, o máximo de f na fronteira é 2 e seu mínimo é -2. Agora, lembrando que no interior de D os possíveis pontos de máximo e mínimo são pontos críticos e reparando que a f tem valor nulo nos seus pontos críticos ($f(x,0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$), temos que 2 e -2 são os máximo e mínimo (globais) da função em D.

3ª Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Licenciatura Física e Matemática - Diurno
1º semestre de 2019 - 17/06/2019$_B$
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Guilherme da Costa Cruz

1. (2,0)

   (a) Seja r a reta tangente à curva $2y^2 + x^2 + 2\text{sen}(x-y) = 3$ no ponto $(1,1)$. Determine a equação da reta r.

   (b) Determine os pontos da curva de nível $x^2 + xy + y^2 = 1$ cuja reta tangente seja paralela à reta r do item anterior.

Resolução: a) Como a reta r passa pelo ponto $(1,1)$, se (x,y) é outro ponto qualquer da reta, temos que o vetor $(x-1, y-1)$ é vetor diretor da reta e , pontanto, tangente à curva dada por $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2\text{sen}(x-y) = 3$. Assim, vale que $\nabla f(x,y) =$
$= (2x + 2\cos(x-y), 4y - 2\cos(x-y))$ é perpendicular, no ponto $(1,1)$, ao vetor diretor, então:
$\nabla f(1,1).(x-1, y-1) = 0 \Leftrightarrow (2+2, 4-2).(x-1, y-1) = 0 \Leftrightarrow 2y - 2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$y + 2x = 3 \Leftrightarrow y = -2x + 3$. Logo, as duas últimas equações são equações da reta r.

b) Seja (a,b) fixado um ponto da curva de nível $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 1$, então, do mesmo modo que acima, podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em (a,b) pela equação $\nabla g(a,b).(x-a, y-b) = 0$, onde $\nabla g(a,b) = (2a+b, a+2b)$, então:
$(2a+b)(x-a) + (a+2b)(y-b) = 0 \Rightarrow x(2a+b) + y(a+2b) - 2(a^2 + ab + b^2) = 0$, repare que $(a^2 + ab + b^2) = g(a,b) = 1$, pois (a,b) pertence à curva, então a equação da reta é dada por $x(2a+b) + y(a+2b) = 2$.

E, para que essa reta seja paralela à reta r, devemos ter $\dfrac{2a+b}{2} = \dfrac{a+2b}{1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a + b = 2a + 4b \Rightarrow 3b = 0 \Rightarrow b = 0$ e $g(a,0) = a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ ou $a = -1$. Logo, os pontos da curva que satisfazem o enunciado são: $(a,b) = (-1,0)$ ou $(a,b) = (1,0)$.

2. (2,0) Seja $f(x,y) = x^3y^2 + ax^2 + bx$, onde a, b são constantes reais. Determine os valores de a e b que fazem do ponto $P = (-1, 0)$ um ponto de sela de f.

Resolução:

Uma condição necessária para que $(-1, 0)$ seja ponto de sela é que $(-1, 0)$ seja ponto crítico, isto é, $\nabla f(-1, 0) = (0, 0)$, onde $\nabla f(x, y) = (3x^2y^2+2ax+b, 2x^3y) \Rightarrow \nabla f(-1, 0) = (-2a+b, 0)$. Assim, devemos ter $(-2a + b, 0) = (0, 0) \Rightarrow b = 2a$.

Lembremos, também, que, se a hessiana $H(-1, 0)$ for estritamente negativa, então teremos um ponto de sela. Calculemos ela: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6xy^2 + 2a \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) = 2a = b$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6x^2y \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, 0) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x^3 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 0) = -2$

$\therefore H(1, 0) = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a = -2b$. Assim, $H(1, 0) < 0 \Leftrightarrow a > 0$.

Logo, se $a > 0$ e $b = 2a$, então $(1, 0)$ será ponto de sela.

Obs.: Repare que, se $a < 0$, teríamos, pela hessiana, que $(-1, 0)$ seria de máximo local e, se $a = 0$, então $f(x, y) = x^3y^2$ e $(-1, 0)$ também seria máximo local (não estrito) (porque, para todo (x, y) na bola de centro $(-1, 0)$ e raio $1/2$, teríamos que$0 = f(-1, 0) \geqslant f(x, y)$). Assim, os valores de a e b que satisfazem as condições acima são os únicos que tornam $(-1, 0)$ ponto de sela.

3. (3,0) Encontre os pontos da elipse $x^2+xy+y^2=6$ mais próximos e mais distantes da origem.

Resolução:

Devemos encontrar os (x,y) que são restritos a $g(x,y)=x^2+xy+y^2=6$ e que tornam a função $d(x,y)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$ máxima ou mínima, o que é o mesmo que encontrar os pontos de máximo e mínimo de $f(x,y)=x^2+y^2$ (pois a função raiz quadrada é crescente) que satisfazem $g(x,y)=6$. Pela regra de multiplicadores de Lagrange, sabemos que, se (x_0,y_0) é ponto de mín. ou máx. local, então $\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0), \lambda\in\mathbb{R}$, então:
$(2x_0,2y_0)=\lambda(2x_0+y_0,2y_0+x_0)$, onde ($x_0=0$ ou $y_0=0$) $\Rightarrow x_0=y_0=0$ e $g(0,0)=0\neq 6$, então $x_0\neq 0\neq y_0$ e segue que $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{2x_0+y_0}{2x_0}=\dfrac{2y_0+x_0}{2y_0}\Rightarrow 4x_0y_0+2x_0^2=4x_0y_0+2y_0^2\Rightarrow$ $x_0^2=y_0^2\Rightarrow x_0=y_0$ ou $x_0=-y_0$:

(a) Se $x_0=y_0$: $g(x_0,y_0)=3x_0^2=6\Rightarrow x_0=\pm\sqrt{2}$.

(b) Se $x_0=-y_0$: $g(x_0,y_0)=x_0^2=6\Rightarrow x_0=\pm\sqrt{6}$.

Assim, vendo que $f(\sqrt{2},\sqrt{2})=f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})=4$ e $f(-\sqrt{6},\sqrt{6})=f(\sqrt{6},-\sqrt{6})=12>4$, temos que $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ são os pontos de mínimo, isto é,os mais próximos da origem; e $(\sqrt{6},-\sqrt{6})$ e $(-\sqrt{6},\sqrt{6})$ são os de máximo, isto é, os mais distantes.

4. (3,0) Seja $f(x,y) = yx^2$ e $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 3\right\}$.

   (a) Justifique a existência de valor máximo e mínimo de f em D.

   (b) Encontre os pontos críticos de f no interior de D.

   (c) Encontre os valores máximo e mínimo de f em D.

Resolução:

(a) A função f é contínua e D é um conjunto limitado e fechado (como $D \subset \mathbb{R}^2$, podemos chamá-lo de compacto), então, pelo Teorema de Weirstrass, f possui valor de máximo e de mínimo.

(b) (x,y) é pontos crítico no interior de $D \Leftrightarrow \nabla f(x,y) = (2xy, x^2) = (0,0)$ e $x^2+y^2 < 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ x = 0 \\ x^2+y^2 < 3 \end{array}\right\}$. Logo, os pontos críticos são os $(0,y)$ tal que $y \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

(c) Vejamos os máximos e mínimos na fronteira, isto é, para (x,y) que satisfazem $x^2+y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3-y^2$, então, na fronteira, a função é dada por: $f(x,y) \doteq g(y) = y(3-y^2)$, $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Estudando essa função, chega-se que o máximo dela é 2 e ocorre quando $y = 1$ e o mínimo é -2, quando $y = -1$. Por exemplo, pode-se reparar $g'(y) = 3-3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ou $y = -1$ e que $g(\pm\sqrt{3}) = 0$.

   Assim, o máximo de f na fronteira é 2 e seu mínimo é -2. Agora, lembrando que no interior de D os possíveis pontos de máximo e mínimo são pontos críticos e reparando que a f tem valor nulo nos seus pontos críticos ($f(0,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$), temos que 2 e -2 são os máximo e mínimo (globais) da função em D.