$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Licenciatura Física e Matemática - Diurno
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2019 - 9/05/2019$_A$
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Guilherme da Costa Cruz

1. (2,5) Considere as seguintes funções de duas variáveis:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \operatorname{sen}(x^3+y)$$

Em cada caso calcule o limite se existir, ou mostre que o limite não existe. Justifique sua resposta.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\cdot g(x,y)$

Resolução: a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^4+y^2}$

Repare que, ao tomarmos a curva $\gamma(t) = (0,t)$, onde $\gamma(t) \to (0,0) \Leftrightarrow t \to 0$ (isto é, o caminho pela reta $x = 0$), temos: $\displaystyle\lim_{\gamma(t)\to(0,0)} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot t}{0^4+t^2} = 0$. E, escolhendo $\alpha(t) = (t,t)$, onde $\alpha(t) \to (0,0) \Leftrightarrow t \to 0$ (o caminho pela reta $x = y$), temos:
$\displaystyle\lim_{\alpha(t)\to(0,0)} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^4+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2(t^2+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2+1} = 1$. Assim,
$\displaystyle\lim_{\gamma(t)\to(0,0)} f(\gamma(t)) = 0 \neq 1 = \lim_{\alpha(t)\to(0,0)} f(\alpha(t))$ e, portanto, não existe o limite.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\cdot g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\operatorname{sen}(x^3+y)}{x^4+y^2}$

Sabemos, pelo limite fundamental, que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^3+y)}{x^3+y} = 1$. Então, multiplicando e divindo por x^3+y, temos: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\cdot g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^3+y)}{x^4+y^2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x^3+y)}{x^3+y}$, onde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^3+y)}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^4}{x^4+y^2} + \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0 + 0 = 0$, já que podemos usar o confronto: 1)$y \to 0$ e $0 \leq x^4 \leq x^4+y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^4}{x^4+y^2} \leq 1$;

2)$x \to 0$ e $0 \leq y^2 \leq x^4+y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{y^2}{x^4+y^2} \leq 1$.

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^3+y)}{x^4+y^2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x^3+y}{x^3+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^3+y)}{x^4+y^2}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^3+y)}{x^3+y} =$
$= 0\cdot 1 = 0$

2. (2,5) Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Determine as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, explicitando os domínios.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

(c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$?

Resolução:

(a) Para $(x,y)\neq(0,0)$:

i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{4x^3(x^2+y^2)-x^4(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{0\cdot(x^2+y^2)-x^4(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$.

Agora, para $(x,y)=(0,0)$:

i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+0,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h^4}{h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h=0$;

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h+0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$.

Logo, $\text{Dom}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\text{Dom}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\mathbb{R}^2$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)\Leftrightarrow\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2x\cdot\dfrac{x^4+2x^2y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}=0=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (usamos o teorema do confronto: $2x\to 0$ e $0\leq\frac{x^4+2x^2y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}\leq 1$). Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (0,0).

ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}-2y\cdot\dfrac{x^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ (usamos o confronto: $-2y\to 0$ e $0\leq\frac{x^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}\leq 1$). Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em (0,0).

(c) Pelo item b) e por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ serem quocientes de polinômios (que são funções contínuas) em que o denominador não se anula para todo $(x,y)\neq(0,0)$, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^2$.

3. (2,5) Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2\text{sen}\left(\dfrac{x}{y^2}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

(a) Determine as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, explicitando os domínios.

(b) f é diferenciável em $(1,0)$?

Resolução:

(a) Para $y \neq 0$:

i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2\text{sen}\left(\dfrac{x}{y^2}\right) + xy^2\cos\left(\dfrac{x}{y^2}\right)\dfrac{1}{y^2} = y^2\text{sen}\left(\dfrac{x}{y^2}\right) + x\cos\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(2y)\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{y^2}\right) + xy^2\cos\left(\dfrac{x}{y^2}\right)\left(\dfrac{-2x}{y^3}\right) = 2xy\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{y^2}\right) - \dfrac{2x^2}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y^2}\right).$

Agora, para $y = 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário (repare que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t,0) = 0$):

i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,0) - f(x_0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h} = 0;$

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0,h+0) - f(x_0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x_0h^2\,\text{sen}\left(\frac{x_0}{h^2}\right) - 0}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0} x_0h\,\text{sen}\left(\dfrac{x_0}{h^2}\right) = 0$ (usamos o confronto: $x_0h \to 0$ e $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{x_0}{h^2}\right) \leq 1$).

Assim, $\text{Dom}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \text{Dom}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2.$

(b) Pode-se perceber que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$) não é contínua em (1,0), então usemos a definição:
f é diferenciável em $(1,0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(1+h,0+k) - f(1,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)\cdot h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Assim, reparando que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ e $f(1,0) = 0$, o limite é dado por:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+h)k^2\,\text{sen}\left(\frac{1+h}{k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} k(1+h)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\,\text{sen}\left(\frac{1+h}{k^2}\right).$$

Como $(h,k) \to (0,0)$, podemos assumir que $-1 < h < 1 \Rightarrow |1+h| < 2$; além disso, $|k| = \sqrt{k^2} \leq \sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow \left|\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$, segue que k é multiplicado por um produto de três funções limitadas (ié, uma função limitada), então, pelo confronto, como $k \to 0$, segue que o valor do limite é 0 e, portanto, a função é diferenciável em (1,0).

4. (2,5) Seja $f(x,y) = (ax+by)e^{xy}$. Determine números reais a e b tais que as seguintes duas condições sejam satisfeitas simultaneamente.

   (a) O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,0,f(1,0))$ seja perpendicular ao plano $-x+y+z=0$.

   (b) O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1,f(0,1))$ seja paralelo ao plano $2x-y+z=0$.

Resolução:

Para satisfazer a condição (a), o vetor $\vec{n}_1 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0), -1\right)$, que é o normal do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,0,f(1,0))$, deve ser perpendicular ao vetor $(-1,1,1)$, que é o normal do plano $-x+y+z=0$, isto é, $(-1,1,1)\cdot\vec{n}_1 = 0$.

Assim, calculando $\vec{n}_1$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ae^{xy} + (ax+by)e^{xy}.y \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = ae^0 + (a)e^0.0 = a$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = be^{xy} + (ax+by)e^{xy}.x \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = be^0 + (a)e^0.1 = b+a$, então $\vec{n}_1 = (a, a+b, -1)$.

Para satisfazer a condição (b), o vetor $\vec{n}_2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1), -1\right)$, que é o normal do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1,f(0,1))$, deve ser paralelo ao vetor $(2,-1,1)$, que é o normal do plano $2x-y+z=0$, isto é, $(2,-1,1) = \lambda\vec{n}_2, \lambda \in \mathbb{R}$.

E calculando $\vec{n}_2$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = ae^0 + (b)e^0.1 = a+b$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = be^0 + (b)e^0.0 = b$, então $\vec{n}_2 = (a+b, b, -1)$.

Agora, só resta descobrir os valores de a e b que satisfazem: $\begin{cases} (-1,1,1)\cdot(a,a+b,-1) = 0 \\ (2,-1,1) = \lambda(a+b,b,-1) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} -a+a+b-1 = 0 \\ (2,-1,1) = \lambda(a+b,b,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ (2,-1,1) = \lambda(a+1,1,-1) \end{cases}$

e, como $(-1,1) = \lambda(1,-1) \Leftrightarrow \lambda = -1$, segue que: $\begin{cases} b = 1 \\ 2 = (-1)(a+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -3 \end{cases}$.

$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Licenciatura Física e Matemática - Diurno
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2019 - 9/05/2019$_B$
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Guilherme da Costa Cruz

1. (2,5) Considere as seguintes funções de duas variáveis:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \operatorname{sen}(x+y^3)$$

Em cada caso calcule o limite se existir, ou mostre que o limite não existe. Justifique sua resposta.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\cdot g(x,y)$

Resolução: a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^4}$

Repare que, ao tomarmos a curva $\gamma(t) = (0,t)$, onde $\gamma(t) \to (0,0) \Leftrightarrow t \to 0$ (isto é, o caminho pela reta $x = 0$), temos: $\lim\limits_{\gamma(t)\to(0,0)} f(\gamma(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0\cdot t}{0^2+t^4} = 0$. E, escolhendo $\alpha(t) = (t,t)$, onde $\alpha(t) \to (0,0) \Leftrightarrow t \to 0$ (o caminho pela reta $x = y$), temos:

$\lim\limits_{\alpha(t)\to(0,0)} f(\alpha(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t\cdot t}{t^2+t^4} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2}{t^2(1+t^2)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t^2+1} = 1$. Assim,

$\lim\limits_{\gamma(t)\to(0,0)} f(\gamma(t)) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{\alpha(t)\to(0,0)} f(\alpha(t))$ e, portanto, não existe o limite.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\cdot g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\operatorname{sen}(x+y^3)}{x^2+y^4}$.

Sabemos, pelo limite fundamental, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x+y^3)}{x+y^3} = 1$. Então, multiplicando e divindo por $x+y^3$, temos: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\cdot g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x+y^3)}{x^2+y^4}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(x+y^3)}{x+y^3}$, onde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x+y^3)}{x^2+y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{yx^2}{x^2+y^4} + \dfrac{xy^4}{x^2+y^4} = 0+0 = 0$, já que podemos usar o confronto: 1) $y \to 0$ e $0 \leq x^2 \leq x^2+y^4 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^4} \leq 1$;

2) $x \to 0$ e $0 \leq y^4 \leq x^2+y^4 \Rightarrow 0 \leq \frac{y^4}{x^2+y^4} \leq 1$.

Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x+y^3)}{x^2+y^4}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(x+y^3)}{x+y^3} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x+y^3)}{x^2+y^4}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x+y^3)}{x+y^3} =$
$= 0\cdot 1 = 0$

2. (2,5) Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Determine as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, explicitando os domínios.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

(c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$?

Resolução:

(a) Para $(x,y) \neq (0,0)$:

i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{0 \cdot (x^2+y^2) - y^4(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$.

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{4y^3(x^2+y^2) - y^4(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2y^5+4y^3x^2}{(x^2+y^2)^2}$;

Agora, para $(x,y) = (0,0)$:

i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+0,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$;

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h+0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^4}{h^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$.

Logo, $\text{Dom}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \text{Dom}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2y^5+4y^3x^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2y \cdot \dfrac{y^4+2x^2y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4} = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ (usamos o teorema do confronto: $2y \to 0$ e $0 \leq \frac{y^4+2x^2y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4} \leq 1$). Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em (0,0).

ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} -2x \cdot \dfrac{y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (usamos o confronto: $-2x \to 0$ e $0 \leq \frac{y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} \leq 1$). Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (0,0).

(c) Pelo item b) e por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ serem quocientes de polinômios (que são funções contínuas) em que o denominador não se anula para todo $(x,y) \neq (0,0)$, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^2$.

3. (2,5) Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} yx^2 \text{sen}\left(\dfrac{y}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determine as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, explicitando os domínios.

(b) f é diferenciável em $(0,1)$?

Resolução:

(a) Para $x \neq 0$:

i. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \text{sen}\left(\dfrac{y}{x^2}\right) + yx^2 \cos\left(\dfrac{y}{x^2}\right)\dfrac{1}{x^2} = x^2 \text{sen}\left(\dfrac{y}{x^2}\right) + y\cos\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(2x)\,\text{sen}\left(\dfrac{y}{x^2}\right) + yx^2 \cos\left(\dfrac{y}{x^2}\right)\left(\dfrac{-2y}{x^3}\right) = 2xy\,\text{sen}\left(\dfrac{y}{x^2}\right) - \dfrac{2y^2}{x}\cos\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.

Agora, para $x = 0$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário (repare que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(0,t) = 0$):

i. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,y_0+h) - f(0,y_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0;$

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+0,y_0) - f(0,y_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y_0 h^2\,\text{sen}\left(\frac{y_0}{h^2}\right) - 0}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0} y_0 h\,\text{sen}\left(\dfrac{y_0}{h^2}\right) = 0$ (usamos o confronto: $y_0 h \to 0$ e $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{y_0}{h^2}\right) \leq 1$).

Assim, $\text{Dom}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \text{Dom}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2$.

(b) Pode-se perceber que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$) não é contínua em (0,1), então usemos a definição:

f é diferenciável em $(0,1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,1+k) - f(0,1) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)\cdot h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Assim, reparando que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ e $f(0,1) = 0$, o limite é dado por:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+k)h^2\,\text{sen}\left(\frac{1+k}{h^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} h(1+k)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\,\text{sen}\left(\frac{1+k}{h^2}\right).$$

Como $(h,k) \to (0,0)$, podemos assumir que $-1 < k < 1 \Rightarrow |1+k| < 2$; além disso, $|h| = \sqrt{h^2} \leq \sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow \left|\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$, segue que h é multiplicado por um produto de três funções limitadas (ié, uma função limitada), então, pelo confronto, como $h \to 0$, segue que o valor do limite é 0 e, portanto, a função é diferenciável em (0,1).

4. (2,5) Seja $f(x,y) = (ax+by)e^{xy}$. Determine números reais a e b tais que as seguintes duas condições sejam satisfeitas simultaneamente.

(a) O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1,f(0,1))$ seja perpendicular ao plano $x - y + z = 0$.

(b) O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,0,f(1,0))$ seja paralelo ao plano $-x+3y+z=0$.

Resolução:

Para satisfazer a condição (a), o vetor $\vec{n}_1 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1), -1\right)$, que é o normal do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1,f(0,1))$, deve ser perpendicular ao vetor $(1,-1,1)$, que é o normal do plano $x-y+z=0$, isto é, $(1,-1,1)\cdot\vec{n}_1 = 0$.

Assim, calculando $\vec{n}_1$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ae^{xy} + (ax+by)e^{xy}.y \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = ae^0 + (b)e^0.1 = a+b$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = be^{xy} + (ax+by)e^{xy}.x \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = be^0 + (b)e^0.0 = b$, então $\vec{n}_1 = (a+b, b, -1)$.

Para satisfazer a condição (b), o vetor $\vec{n}_2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0), -1\right)$, que é o normal do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,0,f(1,0))$, deve ser paralelo ao vetor $(-1,3,1)$, que é o normal do plano $-x+3y+z=0$, isto é, $(-1,3,1) = \lambda\vec{n}_2, \lambda\in\mathbb{R}$.

E calculando $\vec{n}_2$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = ae^0 + (a)e^0.0 = a$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = be^0 + (a)e^0.1 = b+a$, então $\vec{n}_2 = (a, a+b, -1)$.

Agora, só resta descobrir os valores de a e b que satisfazem: $\begin{cases} (1,-1,1)\cdot(a+b,b,-1) = 0 \\ (-1,3,1) = \lambda(a,a+b,-1) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a+b-b-1 = 0 \\ (-1,3,1) = \lambda(a,a+b,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ (-1,3,1) = \lambda(1,1+b,-1) \end{cases}$

e, como $(-1,1) = \lambda(1,-1) \Leftrightarrow \lambda = -1$, segue que: $\begin{cases} a = 1 \\ 3 = (-1)(b+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$.