Gabarito de prova 1 de MAT2351
Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
1º semestre de 2019 - 28/03/2019
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Guilherme Cruz

1. (2,0) Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

Resolução: O comprimento $L(\gamma)$ é dado por $L(\gamma) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\| dt$, onde $\|\gamma'(t)\|$ é o módulo de $\gamma'(t)$.

Assim, sabendo que $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t + (\operatorname{sen} t + t\cos t),\ \cos t - (\cos t - t\operatorname{sen} t)) = (t\cos t,\ t\operatorname{sen} t)$, segue que $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\operatorname{sen} t)^2} = \sqrt{t^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{t^2} = |t|$. E, levando em conta que os valores que t assume são positivos (ou nulo), $\|\gamma'(t)\| = |t| = t$.

Concluindo que $L(\gamma) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt = \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 0^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2. (3,0) Considere a curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (t^2, 2t^3 - 6t)$$

(a) Encontre as interseções de γ com os eixos.

(b) Determine $\gamma'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ache os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal ou vertical.

(c) Estude o comportamento de $\gamma'(t)$

(d) Esboce a imagem da curva e indique o sentido de percurso determinado por γ.

Resolução:

(a) Denotando $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, a curva se encontra com o eixo x quando $y(t) = 2t^3 - 6t = 0 \Leftrightarrow t(2t^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -\sqrt{3}$ ou $t = \sqrt{3}$. E se encontra com o eixo y quando $x(t) = t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Assim, as intersecções de γ com os eixos acontecem nos pontos $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(-\sqrt{3}) = (3,0) = \gamma(\sqrt{3})$.

(b) Temos que $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (2t, 6t^2 - 6)$.

Além disso, a tangente (que tem a mesma direção do vetor $\gamma'(t)$) é:

(a) vertical $\Leftrightarrow x'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

(b) horizontal $\Leftrightarrow y'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \,\mathrm{ou}\, t = 1$

Logo, o único ponto da curva em que a tangente é vertical é o $\gamma(0) = (0,0)$ e os pontos em que ela é horizontal são $\gamma(-1) = (1,4) \,\mathrm{e}\, \gamma(1) = (1,-4)$.

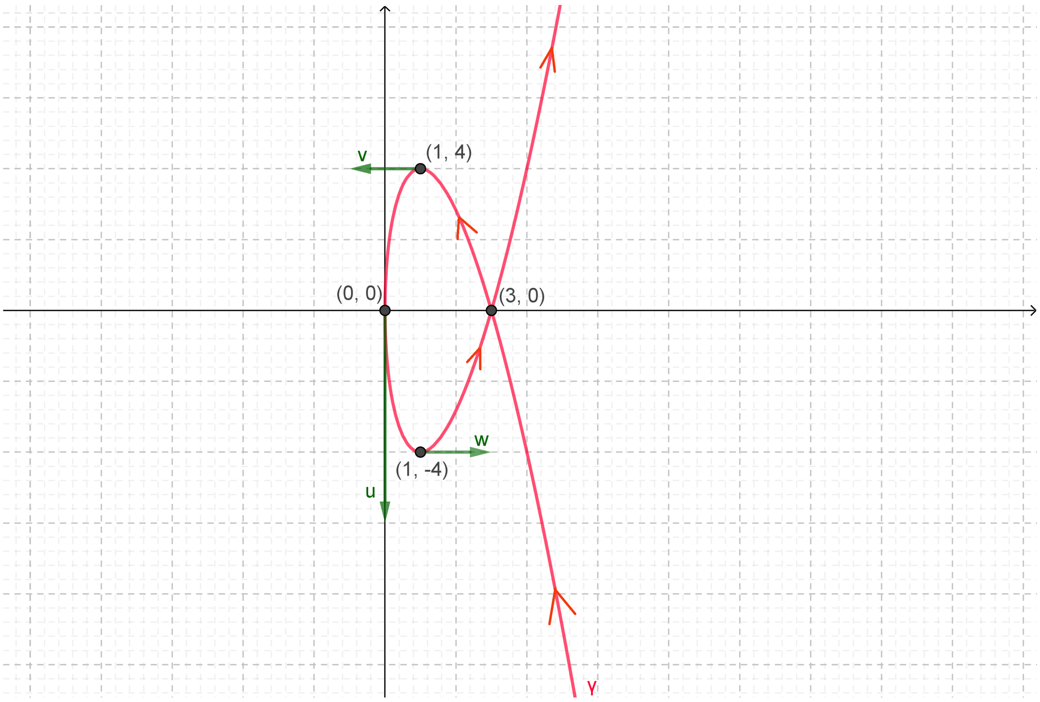
(c) Vejamos o comportamento do vetor $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (2t, 6t^2 - 6)$, que é tangente à curva, em 3 etapas:

(a) $\underline{t < -1}$: $t^2 > 1 \Rightarrow 6t^2 - 6 > 0 \Rightarrow x'(t) < 0$ e $y'(t) > 0$, ou seja, o vetor tangente à curva tem sentido p/ esquerda e p/ cima. Além disso, se $t \to -\infty$, então $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \to -\infty$, isso quer dizer que a tangente do ângulo de inclinação do vetor tende a $-\infty$, isto é, o vetor tende a ser vertical.

(b) $\underline{-1 \leqslant t \leqslant 1}$: para t<0, $x'(t) < 0$ e $y'(t) \leqslant 0$ e, para t>0, $x'(t) > 0$ e $y'(t) \leqslant 0$; assim, o vetor está na direção horizontal quando $t = -1$ ($\gamma'(-1) = (-2,0)$), tem sentido p/ esquerda e p/ baixo quando $-1 < t < 0$; atinge a direção vertical quando t=0 ($\gamma'(0) = (0,-6)$), tem sentido p/ direita e p/ baixo quando $0 < t < 1$ e atinge, novamente, a direção horizontal quando t=1 ($\gamma'(1) = (2,0)$).

(c) $\underline{t > 1}$: $x'(t) > 0$ e $y'(t) > 0$; isto é, o vetor tem sentido p/ cima e p/direita. Além disso, se $t \to +\infty$, então $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \to +\infty$, e, pela mesma ideia do primeiro item, o vetor tende a ser vertical.

(d) Traçando os pontos em que a curva corta os eixos e em que a tangente é vertical ou horizontal, representando o vetor tangente $\gamma'(t)$ nos pontos $t = -1$, $t = 0$ e $t = 1$ por v, u e w, respectivamente, e percebendo que $\gamma(t) \to (+\infty, -\infty)$ quando $t \to -\infty$ e que $\gamma(t) \to (+\infty, +\infty)$ quando $t \to +\infty$, além de visualizar o estudo do item (c), podemos desenhar um esboço da imagem da curva:



v
(1, 4)
(0, 0)
(3, 0)
w
(1, -4)
u
γ

3. (2,0) Calcule a área da região que é delimitada pela seguinte curva dada em coordenadas polares e que está no setor específicado:

$$r = 3 + 2\sin\theta; \;\; \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

Resolução: Temos que a área A é dada por $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r(\theta)^2\, d\theta$, onde $r(\theta)^2 = 9 + 12\operatorname{sen}\theta +$ $+4\operatorname{sen}^2\theta$ e lembrando a transformação $2\operatorname{sen}^2\theta = (1 - \cos 2\theta)$, temos que $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 9 +$ $+12\operatorname{sen}\theta\, d\theta + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2(1 - \cos 2\theta)\, d\theta = \dfrac{1}{2}\left(9\theta - 12\cos\theta\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \left(\theta - \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{9\pi}{4} - 6\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) +$ $\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}(-1-1)\right) = \dfrac{9\pi}{4} + 6\sqrt{2} + \dfrac{\pi}{2} + 1 = 1 + \dfrac{11\pi}{4} + 6\sqrt{2}.$

4. (3,0) Considere a função de duas variáveis $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$.

   (a) Determine e esboce o domínio de f.

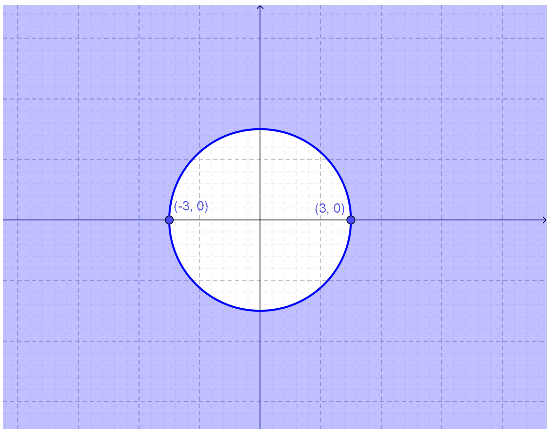
   (b) Determine e esboce a interseção do gráfico de f com os planos xz e yz.

   (c) Determine e esboce as curvas de nível 0, 1, $\sqrt{7}$ de f.

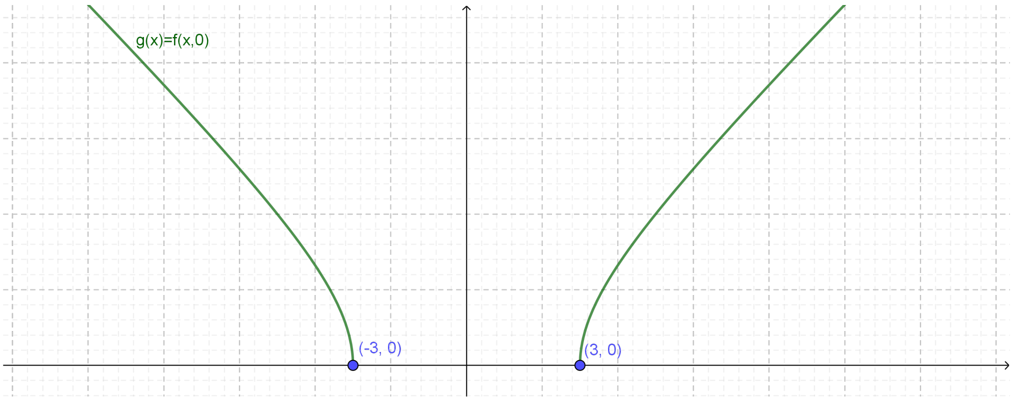
   (d) Esboce o gráfico de f.

Resolução:

(a) A função está definida quando $x^2+y^2-9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geqslant 3^2$, isto é, o domínio $Dom(f)$ é dado pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ na borda ou no exterior da circunferência de raio 3 e centro $(0, 0)$.



(b) O gráfico de f intercepta o plano xz quando $y = 0$ e temos que $f(x, 0) = \sqrt{x^2 - 9}$. Ou seja, a intersecção com o plano xz é dada pelo gráfico de $g(x) \doteq f(x, 0)$ onde $(x, 0) \in Dom(f) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ e $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$. Assim, para fazer o esboço, pode-se perceber que a função atinge o zero em $x = 3$, é crescente para $x > 3$ e $g'(x) \to 1$ quando $x \to +\infty$, nota-se também que $g(x) = g(-x)\, \forall x \in Dom(g)$.



Para a intersecção com o plano yz, temos que $x = 0$ e, portanto, ela é dada como o gráfico de $f(0, y) = \sqrt{y^2 - 9}$. Assim, y, nesse caso, faz um papel completamente análogo ao do x no caso acima e o gráfico da intersecção com o plano yz é idêntico ao anterior, com exceção de que o eixo horizontal seria, na verdade, o eixo dos valores de y.

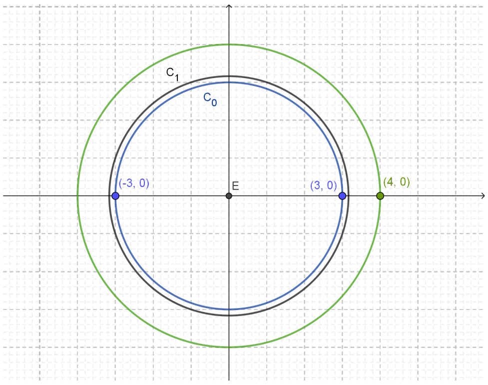
(c) Cada curva de nível é dada por um valor da função:

(a) $f = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 = 3^2$;

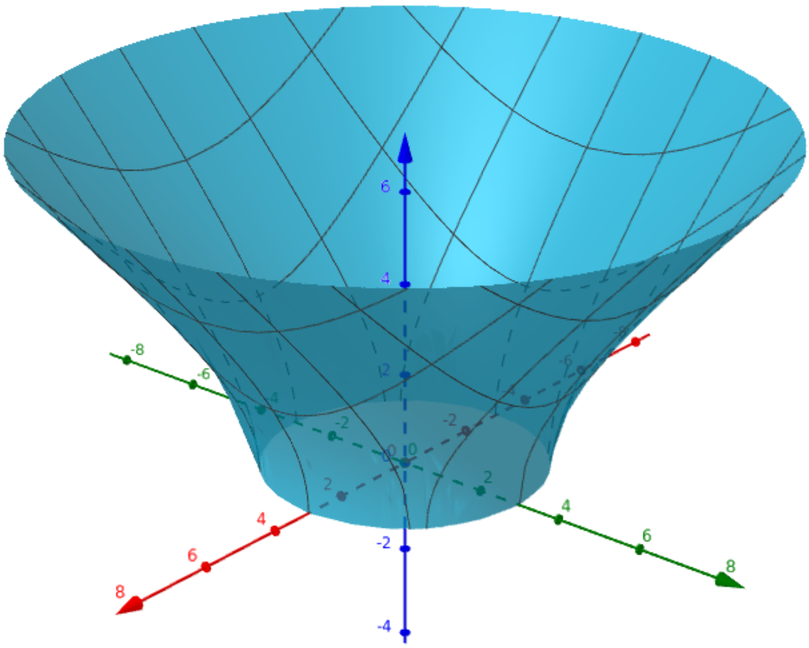
(b) $f = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$;

(c) $f = \sqrt{7} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16 = 4^2$.

Ou seja, são circunferências de raio 3, $\sqrt{10}$ e 4.



(d) Assim, podemos traçar um esboço da f.



Gabarito de prova 1 de MAT2351
Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
1º semestre de 2019 - 28/03/2019
Prof. Wilson Cuellar
Monitor: Guilherme Cruz

1. (2,0) Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t - t\cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi/3]$.

   Resolução: O comprimento $L(\gamma)$ é dado por $L(\gamma) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \|\gamma'(t)\| dt$, onde $\|\gamma'(t)\|$ é o módulo de $\gamma'(t)$.

   Assim, sabendo que $\gamma'(t) = (\cos t - (\cos t - t \operatorname{sen} t),\ -\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t\cos t) = (t \operatorname{sen} t,\ t\cos t)$, segue que $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(t \operatorname{sen} t)^2 + (t\cos t)^2} = \sqrt{t^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{t^2} = |t|$. E, levando em conta que os valores que t assume são positivos (ou nulos), $\|\gamma'(t)\| = |t| = t$.

   Concluindo que $L(\gamma) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\, dt = \frac{(\frac{\pi}{3})^2 - 0^2}{2} = \frac{\pi^2}{18}$.

2. (3,0) Considere a curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (2t^3 - 6t, t^2)$$

(a) Encontre as interseções de γ com os eixos.

(b) Determine $\gamma'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ache os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal ou vertical.

(c) Estude o comportamento de $\gamma'(t)$

(d) Esboce a imagem da curva e indique o sentido de percurso determinado por γ.

Resolução:

(a) Denotando $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, a curva se encontra com o eixo y quando $x(t) = 2t^3 - 6t = 0 \Leftrightarrow t(2t^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -\sqrt{3}$ ou $t = \sqrt{3}$. E se encontra com o eixo x quando $y(t) = t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Assim, as intersecções de γ com os eixos acontecem nos pontos $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\gamma(-\sqrt{3}) = (0, 3) = \gamma(\sqrt{3})$.

(b) Temos que $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (6t^2 - 6, 2t)$.

Além disso, a tangente (que tem a mesma direção do vetor $\gamma'(t)$) é:

(a) vertical $\Leftrightarrow x'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \,\text{ou}\, t = 1$

(b) horizontal $\Leftrightarrow y'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Logo, o único ponto da curva em que a tangente é horizontal é o $\gamma(0) = (0, 0)$ e os pontos em que ela é vertical são $\gamma(-1) = (4, 1)\,\text{e}\,\gamma(1) = (-4, 1)$.

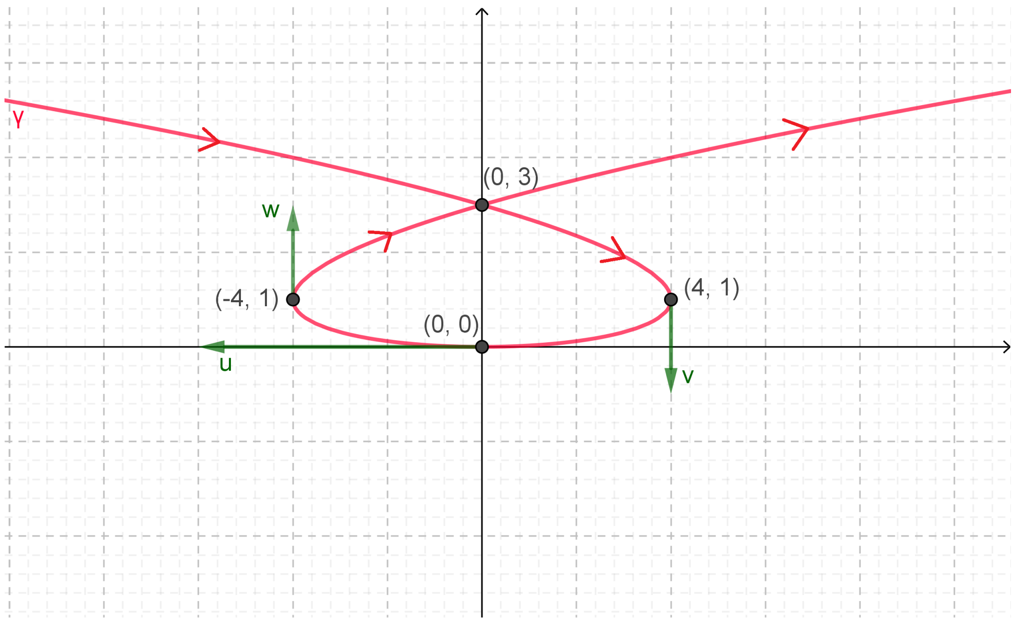
(c) Vejamos o comportamento do vetor $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (6t^2 - 6, 2t)$, que é tangente à curva, em 3 etapas:

(a) $\underline{t < -1}$: $t^2 > 1 \Rightarrow 6t^2 - 6 > 0 \Rightarrow y'(t) < 0$ e $x'(t) > 0$, ou seja, o vetor tangente à curva tem sentido p/ baixo e p/ direita. Além disso, se $t \to -\infty$, então $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \to 0$, isso quer dizer que a tangente do ângulo de inclinação do vetor tende a 0, isto é, o vetor tende a ser horizontal.

(b) $\underline{-1 \leqslant t \leqslant 1}$: para t<0, $y'(t) < 0$ e $x'(t) \leqslant 0$ e, para t>0, $y'(t) > 0$ e $x'(t) \leqslant 0$; assim, o vetor está na direção vertical quando $t = -1$ ($\gamma'(-1) = (0, -2)$), tem sentido p/ baixo e p/ esquerda quando $-1 < t < 0$; atinge a direção horizontal quando t=0 ($\gamma'(0) = (-6, 0)$), tem sentido p/ cima e p/ esquerda quando $0 < t < 1$ e atinge, novamente, a direção vertical quando t=1 ($\gamma'(1) = (0, 2)$).

(c) $\underline{t > 1}$: $x'(t) > 0$ e $y'(t) > 0$; isto é, o vetor tem sentido p/ cima e p/direita. Além disso, se $t \to +\infty$, então $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \to 0$, e, pela mesma ideia do primeiro item, o vetor tende a ser horizontal.

(d) Traçando os pontos em que a curva corta os eixos e em que a tangente é vertical ou horizontal, representando o vetor tangente $\gamma'(t)$ nos pontos $t = -1$, $t = 0$ e $t = 1$ por v, u e w, respectivamente, e percebendo que $\gamma(t) \to (-\infty, +\infty)$ quando $t \to -\infty$ e que $\gamma(t) \to (+\infty, +\infty)$ quando $t \to +\infty$, além de visualizar o estudo do item (c), podemos desenhar um esboço da imagem da curva:


γ
(0, 3)
w
(-4, 1)
(4, 1)
(0, 0)
u
v

3. (2,0) Calcule a área da região que é delimitada pela seguinte curva dada em coordenadas polares e que está no setor específicado:

$$r = 2 + \operatorname{sen}\theta; \;\; \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

Resolução: Temos que a área A é dada por $A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} r(\theta)^2\, d\theta$, onde $r(\theta)^2 = 4 + 4\operatorname{sen}\theta +$ $+\operatorname{sen}^2\theta$ e lembrando a transformação $sen^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$, temos que $A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 4 +$ $4sen\theta\, d\theta$ $+$ $+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\left(4\theta - 4cos\theta\right)_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{4}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} - (-1-1) + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ $\frac{2\pi}{3} + 2 + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} = 2 + \frac{3\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$

4. (3,0) Considere a função de duas variáveis $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

(a) Determine e esboce o domínio de f.

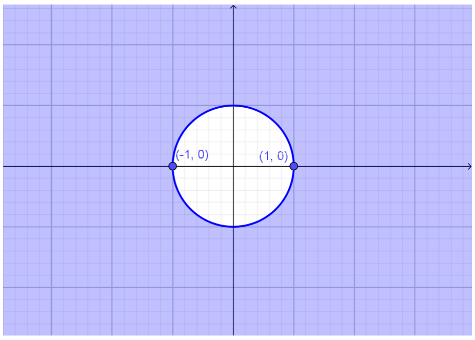
(b) Determine e esboce a interseção do gráfico de f com os planos xz e yz.

(c) Determine e esboce as curvas de nível 0, 1, $\sqrt{3}$ de f.

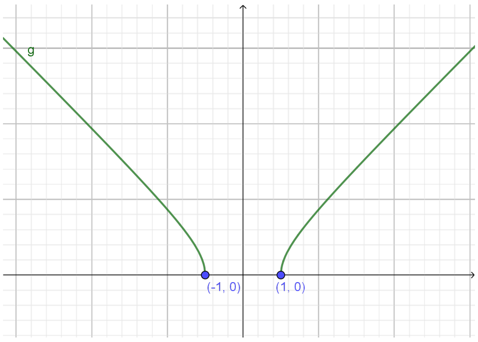
(d) Esboce o gráfico de f.

Resolução:

(a) A função está definida quando $x^2+y^2-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geqslant 1^2$, isto é, o domínio $Dom(f)$ é dado pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ na borda ou no exterior da circunferência de raio 1 e centro $(0, 0)$.



(b) O gráfico de f intercepta o plano xz quando $y = 0$ e temos que $f(x, 0) = \sqrt{x^2 - 1}$. Ou seja, a intersecção com o plano xz é dada pelo gráfico de $g(x) \doteq f(x, 0)$ onde $(x, 0) \in Dom(f) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Assim, para fazer o esboço, pode-se perceber que a função atinge o zero em $x = 1$, é crescente para $x > 1$ e $g'(x) \to 1$ quando $x \to +\infty$, nota-se também que $g(x) = g(-x)\, \forall x \in Dom(g)$.



Para a intersecção com o plano yz, temos que $x = 0$ e, portanto, ela é dada como o gráfico de $f(0, y) = \sqrt{y^2 - 1}$. Assim, y, nesse caso, faz um papel completamente análogo ao do x no caso acima e o gráfico da intersecção com o plano yz é idêntico ao anterior, com exceção de que o eixo horizontal seria, na verdade, o eixo dos valores de y.

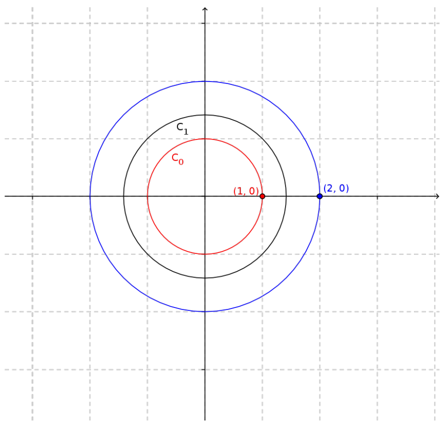
(c) Cada curva de nível é dada por um valor da função:

(a) $f = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$;

(b) $f = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$;

(c) $f = \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 = 2^2$.

Ou seja, são circunferências de raio 1, $\sqrt{2}$ e 2.



(d) Assim, podemos traçar um esboço da f.