MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I, 2019
Lista 6 - Regra da cadeia - Derivadas direcionais - Vetor gradiente

Wilson Cuellar

1. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ usando a regra da cadeia.

   (a) $z = 2x^2 - y^3$; $x(u,v) = u^2 - e^v$, $y = 3v\text{sen}(u)$.

   (b) $z = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$; $x(u,v) = u\cos(v)$, $y = u\text{sen}(v)$.

2. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até segunda ordem.

   (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

   (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3. Considere a curva C dada pela pela equação $3y^2 - x^2 - \text{sen}(x-y) = 8$. Determine a equação da reta tangente a C no ponto $(2,2)$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável, com $\nabla f(-3,-3) = (-2,a)$ e seja $g(t) = f(2t^2 - 5t, t^3 - 4t^2)$. Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta de equação $y = -3x + 2$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,2,f(0,2))$. Seja $g(u,v) = uf(\text{sen}(u^2 - v^3), 2u^2v)$. Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1,g(1,1))$ seja paralelo ao vetor $(4,2,a)$.

6. Determine a derivada direcional máxima de f em P e encontre a direção e sentido em que ela ocorre.

   (a) $f(x,y) = xye^{x^2y^2}$, $P = (2,3)$

   (b) $f(x,y) = \ln(1 + \sin^2(x^2y^3))$, $P = (0,1)$

   (c) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P = (1,1)$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2 + y^2}$, $P = (1,-1)$

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável. Suponha que para um ponto $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que não pode ser curva de nível de f passando pelo ponto p

   (a) $\gamma(t) = (-\frac{1}{t}, t)$

   (b) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$

   (c) $\gamma(t) = (\frac{t^5}{5}, -\frac{2t^3}{3} + 3t)$

8. Determine todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a derivada direcional da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é na direção do vetor $(1,1)$.

9. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

10. **Quádricas.** Esboce o conjunto de pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem

    (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

    (b) $x^2 + y^2 = z^2$

    (c) $2x^2 - y^2 + z^2 = 0$

    (d) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$

11. Determine um plano tangente à superfície $xyz = a$, $a \neq 0$, e que seja paralelo ao plano $x + y + z = 100$.

12. Determine os pontos do elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $3x - y + 3z = 1$.