

MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I, 2019
Lista 5 - Derivadas parciais - Diferenciabilidade - Plano tangente

Wilson Cuellar

1. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções

(a) $f(x, y) = x^5y^4 - 3x^2y + 3x - y$

(e) $f(x, y) = y^2 \ln(x^2 + y^4)$

(b) $f(x, y) = e^{x^2-y^3}$

(f) $f(x, y) = xye^{x^2y^2}$

(c) $f(x, y) = \sin(x^2y)$

(g) $f(x, y) = \ln(1 + \sin^2(x^2y^3))$

(d) $f(x, y) = \frac{x^2y - xy^2}{x^2 + y^2}$

(h) $f(x, y) = e^{-x} \sin^2(x + y)$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = x^3y^2g(xy)$, onde g é uma função derivável de uma variável, tal que $g(-3) = 5$ e $g'(-3) = 2$. Calcule $f(1, -3)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -3)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -3)$.

3. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2}$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ não existe.

4. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

(a) $f(x, y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$

(b) $f(x, y) = g(ax + by)$, onde a e b são constantes.

5. Considere a função $z = f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

6. Verifique que a função $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

7. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) f é diferenciável em $(0, 0)$?

(d) São $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0, 0)$?

8. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Mostre que existem as derivadas parciais de f no $(0, 0)$, e que f não é contínua em $(0, 0)$. Conclua que f não é diferenciável em $(0, 0)$.
- (b) f é diferenciável em $(x, y) \neq (0, 0)$?

9. Considere a seguinte função.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- (b) f é diferenciável em $(0, 0)$?

10. Considere a seguinte função.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- (b) f é diferenciável em $(0, 0)$?
- (c) f é diferenciável em $(x, y) \neq (0, 0)$?

11. Seja $g(x, y) = \sqrt[3]{3x^4 + 2y^4}$. Mostre que g é de classe \mathcal{C}^1 em \mathbb{R}^2 .

12. Mostre que $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ é diferenciável em todo \mathbb{R}^2 .

13. Ache a equação do plano tangente e da reta normal ao gráfico de cada função no ponto indicado

- (a) $f(x, y) = e^{x^2+2y^2}$, no ponto $(0, 0, 1)$ (c) $f(x, y) = e^x \ln\left(\frac{y}{2}\right)$, no ponto $(1, 2, 0)$
- (b) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + xy$, no ponto $(1, 1, 0)$ (d) $f(x, y) =$, no ponto $(1, 2, 0)$

14. Mostre que os gráficos das funções $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $g(x, y) = \frac{1}{10}(x^2 + y^2) + \frac{5}{2}$ se intersectam no ponto $(3, 4, 5)$ e têm o mesmo plano tangente nesse ponto.

15. Determine uma equação do plano que passa pelos pontos $(0, 1, 5)$ e $(0, 0, 6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x, y) = x^3y$. Existe um só plano?

16. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2, 1, f(2, 1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

17. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.