MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Curvas no plano e no espaço - Lista 2

Wilson Cuellar

1. Faça um esboço do traço de cada uma das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (2t-1, 3t+2)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (b) $\gamma(t) = (\sin t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (c) $\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (d) $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (e) $\gamma(t) = (t, t, 1+\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (f) $\gamma(t) = (2\sin t, 1, 2\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (g) $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (h) $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \geq 0$.
   (i) $\gamma(t) = (1+\sin t, 1+\sin t, \cos t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$

2. Esboçe e parametrize cada conjunto C como uma curva:

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$.
   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, y < 1 \text{ e } x < -3\}$.
   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1 \text{ e } y < 0\}$.
   (d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9 \text{ e } z - x = 2\}$.

3. Calcule

   (a) $\lim_{t\to 1} \gamma(t)$, onde $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, t^2\frac{t-1}{t}\right)$
   (b) $\lim_{t\to 0} \gamma(t)$, onde $\gamma(t) = \left(\frac{\tan 3t}{t}, \frac{e^{2t}-1}{t}, t^3\right)$
   (c) $\lim_{t\to 2} \gamma(t)$, onde $\gamma(t) = \left(\frac{t^3-8}{t^2-4}, \frac{\cos(\frac{\pi}{t})}{t-2}, 2t\right)$

4. Determine equação da reta tangente à trajetória da curva dada, no ponto dado

   (a) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ e $\gamma(\frac{\pi}{3})$
   (b) $\gamma(t) = (t^2, t)$ e $\gamma(3)$
   (c) $\gamma(t) = (2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t))$ e $\gamma(\pi)$
   (d) $\gamma(t) = (\sin(2t), \sin(t + \sin(2t))$ e $\gamma(\pi/2)$
   (e) $\gamma(t) = (e^t, \sin t, cost)$ e $\gamma(0)$

5. Considere as seguintes curvas. Encontre as interseções de γ e γ' com os eixos. Ache os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal ou vertical. Encontre o vetor tangente em cada ponto da curva e estude o comportamento de γ'. Estude a concavidade da curva. Faça um esboço da imagem da curva.

   (a) $\gamma(t) = (t(t^2-3), 3(t^2-3))$
   (b) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$
   (c) $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^6 - t^4)$
   (d) $\gamma(t) = (t^2, t^3 - 3t)$

6. Encontre dy/dx e d^2y/dx^2. Para quais valores de t a curva é côncava para cima?

   (a) $x = t - e^t, \quad y = t + e^{-t}$.
   (b) $x = t + \ln t, \quad y = t - \ln t$.
   (c) $x = \cos 2t, \quad y = \cos t, \quad 0 < t < \pi$.

7. Seja $\alpha(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right)$. Mostre que o cosseno do ângulo entre γ e γ' é constante.

8. Verifique que a curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t \sin t)$ tem duas tangentes em $(0,0)$ e encontre suas equações. Esboçe a imagem da curva.

9. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|\gamma(t)\| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Interprete geometricamente.

10. Calcule o comprimento das seguintes curvas

    (a) $\gamma(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3)$, $t \in [-4, 4]$.
    (b) $\gamma(t) = (1 + 3t^2, 4 + 2t^3)$, $t \in [0, 1]$.
    (c) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$, $t \in [0, \pi]$.
    (d) $\gamma(t) = (e^t + e^{-t}, 5 - 2t)$, $t \in [0, 3]$.
    (e) $\gamma(t) = (t, \ln t)$, $t \in [1, e]$.
    (f) $\gamma(t) = (3\cos t - \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$, $t \in [0, \pi]$.

11. De exemplos de curvas γ e ψ tais que Im $\gamma =$ Im ψ, mas que seus comprimentos sejam diferentes.

12. **Mudança de parâmetro.** Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ e $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^2$ duas curvas com derivadas contínuas. Suponha que existe $g : [c, d] \to [a, b]$, com derivada contínua e tal que $g'(u) > 0$ em $[c, d]$. Supomha, ainda, $g(c) = a$ e $g(d) = b$, e para todo $u \in [c, d]$, $\psi(u) = \gamma(g(u))$. Prove

    (a) Im $\gamma =$ Im ψ.
    (b) γ e ψ tem o mesmo comprimento.

13. Esboce a curva dada por coordenadas polares

    (a) $r = 2$.
    (b) $\theta = \pi/4$.
    (c) $r = \theta$.
    (d) $r = \cos\theta$.
    (e) $r = \sin 2\theta$.
    (f) $r = 1 + \cos\theta$.
    (g) $r = 3\cos\theta$.
    (h) $r = 2\cos 3\theta$.
    (i) $r = 3(1 + \sin\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$.

14. Calcule a área das regiões que é delimitada pelas curvas dadas e está no setor especificado.

    (a) $r = \theta$, $\theta \in [0, \pi]$.
    (b) $r = 1 - \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
    (c) $r = \sin\theta$, $\theta \in [\pi/3, 2\pi/3]$.
    (d) $r = 2 + 2\cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$.

15. Calcule o comprimento das seguintes curvas polares

    (a) $r = 3\sin\theta$, $\theta \in [0, \pi/3]$.
    (b) $r = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
    (c) $r = \theta^2$, $\theta \in [0, 2\pi]$.