MAT0334 - MAT5721: Introdução à Análise Funcional - 2019
Lista 6 - Operadores em espaços de Hilbert e Operadores compactos

Wilson Cuellar

1. Sejam H um espaço de Hilbert, $E \in \mathcal{L}(H)$ um operador idempotente e $M = \text{Im } E$. Mostre que E é a projeção ortogonal de H sobre M se e somente se $\langle Ex, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$.

2. Sejam H um espaço de Hilbert, $E \in \mathcal{L}(H)$ um operador idempotente e $M = \text{Im } E$. Mostre que E é a projeção ortogonal de H sobre M se e somente se E é normal.

3. Defina $k(x, y) = e^{2\pi i(x-y)}$ para $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Mostre que o correspondente operador integral $T_k : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$ é uma projeção ortogonal.

4. Se T é um operador de posto finito entre espaços de Hilbert, então T^* também tem posto finito e $\dim(\text{Im } T) = \dim(\text{Im } T^*)$.

5. Sejam X e Y espaços normados com $\dim X < \infty$ e $T : X \to Y$ linear. Mostre que T é compacto.

6. Mostre com um exemplo que a convergência pontual de uma sequência $(T_n)_n$ em $\mathcal{K}(X)$ para $T \in \mathcal{L}(X)$ não implica em T ser compacto.

7. Sejam X espaço normado e Y subespaço denso em X. Seja Z espaço de Banach e $T \in \mathcal{K}(Y, Z)$. Prove que a extensão contínua $\tilde{T}$ de T a X é um operador compacto.

8. Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Mostre que se $\text{Im } T$ é fechada, então T é de posto finito.

9. Sejam X espaço de Banach e $T \in \mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{F}(X)$. Mostre que $0 \in \overline{T(S_X)}$.

10. Sejam H um espaço de Hilbert separável e $(e_n)_n$ uma base ortonormal de H. Seja T um operador de Hilbert-Schmidt (ver lista 5) e $a_n = T^*(e_n)$. Mostre que $T(x) = \sum_n \langle x, a_n \rangle e_n$, e $(\|a_n\|_2) \in \ell_2$. Conclua que T é compacto.

11. Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que Y tem base de Schauder. Mostre que $\overline{\mathcal{F}(X, Y)} = \mathcal{K}(X, Y)$.

12. Sejam H um espaço de Hilbert separável, $T \in \mathcal{K}(H)$ e $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal de H. Mostre que $\lim_{n\to\infty} \|T(e_n)\| = 0$.

Sugestões

1.) ($\Leftarrow$) Sejam $y \in \text{Im } E$ e $z \in \ker E$. Calcule $\langle E(y + z), y + z \rangle$ e encontre uma contradição ao supor que $\langle y, z \rangle \neq 0$.

2.) Se E é normal, então $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in H$. Mostre que $\ker E = (\text{Im } E)^\perp$.

3 Mostre que T_k é idempotente e auto-adjunto.

6.) X de dimensão infinita com base de Schauder e uma sequência de operadores de posto finito que converge pontualmente à identidade.

8.) Teorema da aplicação aberta.

9.) Mostre que em outro caso $\text{Im } T$ será fechada.

11.) Seja $(e_n)_n$ base de Schauder de Y. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $P_n(\sum_{k=1}^\infty x_k e_k) = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. P_n é contínua e $\sup_n \|P_n\| < \infty$. Proceda como no caso de espaços de Hilbert.