

MAT0334 - MAT5721: Introdução à Análise Funcional - 2019

Lista 5 - Espaços de Hilbert

Wilson Cuellar

1. **Definição.** Dada uma família $(x_i)_{i \in \Gamma}$ de um espaço normado X , dizemos que esta família é *somável* e tem soma $x \in X$, se dado $\epsilon > 0$ existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subseteq \Gamma$ tal que para todo subconjunto finito $F \subseteq \Gamma$ com $F \supseteq F_\epsilon$ temos

$$\left\| x - \sum_{i \in F} x_i \right\| < \epsilon.$$

Dizemos que $(x_i)_{i \in \Gamma}$ satisfaz a *condição de Cauchy* se dado $\epsilon > 0$ existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subseteq \Gamma$ tal que para todo subconjunto finito $F' \subseteq \Gamma$ disjunto de F_ϵ temos

$$\left\| \sum_{i \in F'} x_i \right\| < \epsilon.$$

- (a) Mostre que toda família somável $(x_i)_{i \in \Gamma}$ satisfaz a condição de Cauchy.
- (b) Se a família $(x_i)_{i \in \Gamma}$ satisfaz a condição de Cauchy, então o subconjunto $\Gamma' = \{i \in \Gamma : x_i \neq 0\}$ é enumerável.
- (c) Se X for completo então toda família que satisfaz a condição de Cauchy é somável.
2. Seja Γ um conjunto não vazio. Definimos $\ell_2(\Gamma)$ como o espaço das famílias $(x_i)_{i \in \Gamma}$ de escalares em $\mathbb{K} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ tais que $(|x_i|^2)_{i \in \Gamma}$ é somável.
- (a) Mostre que $\ell_2(\Gamma)$ é prehilbertiano se definirmos $\langle (x_i)_{i \in \Gamma}, (y_i)_{i \in \Gamma} \rangle = \sum_{i \in \Gamma} x_i \overline{y_i}$.
- (b) Mostrar que $\ell_2(\Gamma)$ é de Hilbert.
- (c) Mostre que se Γ for enumerável infinito, então $\ell_2(\Gamma)$ é linearmente isométrico a ℓ_2 .
- (d) Mostre que se Γ for não enumerável, então $\ell_2(\Gamma)$ é não separável.
3. Seja H um espaço prehilbertiano. Mostre a identidade generalizada do paralelogramo: Se $x_1, \dots, x_n \in H$, então

$$\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

4. Seja H um espaço prehilbertiano e $(x_n)_n$ uma sequência em H . Mostre que se $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ e $\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$ então $x_n \rightarrow x$.
5. Mostre que em um espaço prehilbertiano, $x \perp y$ se e somente se $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo escalar α .
6. Seja H prehilbertiano e F subespaço completo de H . Mostre que H/F é prehilbertiano.
7. Seja H prehilbertiano sobre $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ tal que $\langle Th, h \rangle = 0$ para todo $h \in H$. Prove que $T = 0$. Mostre que o resultado não é válido no caso real.

8. Sejam H prehilbertiano sobre $\mathbb{C}$ e $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H, H)$ tais que $\langle T_1 x, x \rangle = \langle T_2 x, x \rangle$ para todo $x \in H$. Mostre que $T_1 = T_2$.
9. (a) Sejam $X = \mathbb{R}^2$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$, $A = B_X$, e $x = (2, 0)$. Determine o conjunto $\{a \in A : d(x, A) = d(x, a)\}$.
- (b) Seja $X = c_0$, o espaço das seqüências convergentes a zero, com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Sejam $A = \{(x_n)_n \in c_0 : x_n \geq 0 \forall n \text{ e } \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{2^n} = 1\}$ e $x = (0, 0, 0, \dots)$. Mostre que $d(x, A) = 1$ e que não existe $a \in A$ tal que $d(x, a) = 1$.
10. Encontre um espaço de Hilbert H e um subespaço F de H tal que $H \neq F + F^\perp$.
11. Seja $(x^k)_k$ uma seqüência ortonormal em ℓ_2 , onde $x^k = (x_i^k)_i$. Mostre que $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i^k) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
12. Seja H um espaço de Hilbert separável. Um operador linear e contínuo $T : H \rightarrow H$ é dito operador de *Hilbert-Schmidt* se existe uma base ortonormal $(e_i)_i$ de H tal que:

$$\|T\|_{HS} := \sqrt{\sum \|Te_i\|^2} < \infty.$$

- (a) Mostre que o valor $\|T\|_{HS}$ é independente da escolha da base.
- (b) Mostre que $\|T\|_{HS} \geq \|T\|$. O número $\|T\|_{HS}$ é chamado de norma Hilbert-Schmidt do operador T .
13. (Teorema de Hellinger-Topplitz). Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow H$ uma aplicação linear tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para todo $x, y \in H$. Mostre que T é contínuo.
14. Seja H um espaço de Hilbert separável. Um operador linear e contínuo $T : H \rightarrow H$ que é um isomorfismo auto-adjunto. Mostre que se T é positivo (ou seja $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$), então $[x, y] := \langle Tx, y \rangle$ define um novo produto interno sobre H e $|||x||| = [x, x]^{\frac{1}{2}}$ é uma norma equivalente sobre H .
15. Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $T : H_1 \rightarrow H_2$ um operador linear contínuo. Se $M_1 \subset H_1$ e $M_2 \subset H_2$ satisfazem que $T(M_1) \subset M_2$, mostre que $M_1^\perp \supset T^*(M_2^\perp)$.
16. Seja $(e_n)_n$ uma base ortonormal de um espaço de Hilbert separável H e defina $T : H \rightarrow H$ como $Te_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Encontre imagem, núcleo, norma e o Hilbert-adjunto de T .
17. Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ uma imersão isométrica. Mostre que $T^*T = Id$, onde Id é o operador identidade em H .

Sugestões

- 1b.) Considere os conjuntos $\Gamma_n = \{i \in \Gamma : \|x_i\| \geq 1/n\}$.
- 1c.) Considere Γ_n da questão anterior e a seqüência $(y_n)_n$, onde $y_n = \sum_{i \in \Gamma_n} x_i$.
- 3.) Use princípio de indução.
- 7.) Considere os vetores $x + y$ e $x + iy$. Considere sobre $\mathbb{R}^2$ o operador de 90 graus de rotação.
- 9.) Observe que em a) Não há unicidade; e em b) Não tem existência, porém A é convexo fechado.
- 10.) Considere o subespaço das seqüências de suporte finito de ℓ_2 .
- 11.) Use a desigualdade de Bessel.
- 12 a) Se $(f_j)_j$ for outra base ortonormal, mostre que $\sum_i \|Te_i\|^2 = \sum_j \|T^*f_j\|^2$.
- 13.) Seja $x_n \rightarrow 0$ em H , mostre que $g(T(x_n)) \rightarrow 0$ para todo $g \in H^*$. Deduzir que $T(x_n)$ é limitado e depois que T é contínuo.