MAT0334 - MAT5721: Introdução à Análise Funcional - 2019
Lista 4 - Aplicações teorema de Baire

Wilson Cuellar

1. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Mostre que qualquer base de Hamel de X é não enumerável.

2. Sejam X e Y espaços de Banach e $(T_n)_n$ uma sequência de operadores em $\mathcal{L}(X,Y)$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) $(\|T_n\|)_n$ é limitada.

   (b) $\|T_n(x)\|_n$ é limitada para todo $x \in X$.

   (c) $\|g(T_n(x))\|_n$ é limitada para todo $x \in X$ e todo $g \in Y^*$.

3. Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. T é *imersão* se T induz um isomorfismo de X sobre TX.

   (a) Mostre que T é imersão se e somente se T é injetora de imagem fechada.

   (b) Se T é uma imersão em Y, então necessariamente T^* é uma imersão em X^*?

   (c) Mostre que se T for uma imersão, então T^* será sobrejetora.

4. (a) Prove diretamente que se X é um espaço de Banach e f um funcional não nulo definido sobre X, então f é aberto.

   (b) Considere a função $T : c_0 \to c_0$ definido por $T((x_n)_n) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_n$. T é um operador linear e contínuo? T é aberto?

5. Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ linear (não necessariamente limitado). Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) T é aberta.

   (b) Existe δ tal que $\delta B_Y \subset T(B_X)$.

   (c) Existe $M > 0$ tal que para todo $y \in Y$ existe $x \in T^{-1}(y)$ satisfazendo $||x||_X \leq M||y||_Y$.

6. Encontre uma sequência de operadores $(T_n)_n$ que converge pontualmente a um operador T tal que $\|T\| < \liminf_n \|T_n\|$.

7. Sejam X um espaço vetorial e $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em X tais que $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ e $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ sejam completos. Suponha também que as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ não são equivalentes. Seja I_1 a aplicação identidade de $(X, \|\cdot\|_1)$ sobre $(X, \|\cdot\|_2)$ e I_2 a aplicação identidade de $(X, ||\cdot||_2)$ sobre $(X, \|\cdot\|_1)$. Mostre que I_1 e I_2 não são contínuas.

8. Seja X o espaço das funçoes deriváveis com derivada contínua sobre $[0,1]$ com a norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Defina a aplicação linear T de X em $C([0,1])$ por $T(f) = f'$. Mostre que T têm gráfico fechado, porém não é contínua. Explique porque o teorema do grafico fechado não pode ser aplicado.

9. Seja X um subespaço fechado de $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ tal que todo elemento de X é derivável com derivada contínua sobre $[0,1]$. O objetivo deste exercício é mostrar que X tem dimensão finita.

(a) Mostre que X munido da norma $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ é de Banach.

(b) Mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $f \in X$, $\|f'\|_\infty \leq n\|f\|_\infty$.

(c) Mostre que B_X é um subconjunto compacto de $(C[0,1], \|.\|_\infty)$.

(d) Concluir.

10. Seja X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $(T_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{L}(X,Y)$, tal que $\sup_n \|T_n\| = +\infty$. Mostre que existe $x_0 \in X$ tal que $\sup_n \|T_n(x_0)\| = +\infty$.

11. Sejam X um espaço vetorial e $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em X tais que $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ e $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ sejam completos. Se $\|x_n\|_1 \to 0$ sempre implica $\|x_n\|_2 \to 0$, mostre que a convergência em X_1 implica a convergência em X_2 e vice versa. Usando isto mostre que existem numeros reais positivos a e b tal que para todo $x \in X$,

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

e portanto as normas são equivalentes.

12. (a) Seja X espaço de Banach, Y subespaço fechado de X e F subespaço de dimensão finita de X, tais que $Y \cap F = \{0\}$. Mostre que $d(S_F, Y) > 0$. Conclua que $Y + F$ é fechado.

(b) Seja X espaço de Banach, Y subespaço fechado de X e F subespaço de dimensão finita de X. Mostre que $Y + F$ é fechado.

Sugestões

1.) Supondo que a Base de Hamel seja enumerável use o teorema de Baire para achar uma contradição.
2.) Para (c) $\to$ (b) Use a imersão canônica de Y em Y^{**} e o teorema da limitação uniforme.
3.) (a) Use teorema da aplicação aberta.
(b) Considere por exemplo a imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$.
(c) Para cada $g \in Y^*$, aplicar teorema de Hahn-Banach a $g \circ T^{-1}$.
4. (a) Se $f(x) = \delta > 0$ para algum $x \in B_X^0$, então $(-\delta, \delta) \subset f(B_X^0)$.
5. (b) $\implies$ (a) $T(B_X^0) \supseteq T(\frac{1}{2}B_X) \supseteq \frac{\delta}{2}B_Y \supseteq \frac{\delta}{2}B_Y^0$, assim T leva vizinhanças de 0 em vizinhanças de 0. Por linearidade, T é aberta.
6.) Escolher $T_n : c_0 \to K$ com $\|T_n\| = 1$ e $T = 0$.
7.) Use o Teorema da Aplicação Aberta.
9. (a) Mostrar que X é fechado em $C_1([0,1])$ com aquela norma.
(b) Aplicar o teorema da aplicação aberta a Id de $X, \|.\|$ em $X, \|.\|_\infty$.
(c) Usar o teorema de Ascoli-Arzelá.
10.) Use o Teorema da Limitação Uniforme.
11.) Olhe para as equivalencias de continuidade das aplicações lineares entre espaços normados.
12 (a) Mostrar que $\inf\{\|y - f\|, y \in Y, f \in F, \|f\| = 1\} > 0$.
(b) Escrever $Y + F {=} Y \oplus G$ onde $G \subset F$.