MAT0334 - MAT5721: Introdução à Análise Funcional - 2019
Lista 3

Wilson Cuellar

Teorema de Hahn-Banach

1. Use o Lema de Zorn para demonstrar que todo espaço vetorial possui uma base de Hamel.

2. Seja x e y dois pontos distintos de um espaço normado X. Mostre que existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

3. Sejam X um espaço normado e Y um subespaço vetorial. Mostre que

$$\bar{Y} = \bigcap \{\ker f \,:\, f \in X^* \text{ tal que } Y \subseteq \ker f\}$$

4. Seja X um espaço normado de dimensão infinita. Mostre X^* tem dimensão infinita.

5. Sejam X um espaço normado e Y um subespaço de X. Dado $T \in \mathcal{L}(Y, \ell_\infty)$, use o teorema de Hahn-Banach para demonstrar que existe uma extensão $S \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$ tal que $\|T\| = \|S\|$.

6. Seja X um espaço de Banach separável, mostre que existe uma imersão isometrica linear de X em ℓ_∞. Dizemos então que ℓ_∞ é *isometricamente universal* para a família de espaços de Banach separáveis.

7. Considere o espaço vetorial $X = \mathbb{R}^2$ e Y o subespaço de X dado por $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Seja $f : Y \to \mathbb{R}$ o funcional em Y definido por $f(x, 0) = x$. Note que f é contínuo em relação a qualquer norma com que X seja munido.

   (a) Considere X munido da norma euclidiana. Mostre que existe uma única extensão $g \in X^*$ de f tal que $\|f\| = \|g\|$.

   (b) Considere X munido da norma $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$. Mostre que f admite infinitas extensões $g \in X^*$ tais que $\|f\| = \|g\|$.

8. Sejam X um espaço normado e $f \in S_{X^*}$. Mostre que para cada $x \in X$ temos $dist(x, \ker f) = |f(x)|$.

9. Sejam X e Y espaços normados. Mostre que uma aplicação linear $T : X \to Y$ é contínua se e somente se

$$\sup \{|f(Tx)| \,:\, x \in B_X, f \in B_{Y^*}\}$$

   é finito. Se T for limitado, então $\|T\|$ é justamente esse supremo.

10. Mostre que existe um funcional contínuo $L : \ell_\infty \to \mathbb{K}$ tal que:

    (a) $\|L\| = 1$.

    (b) Se $(x_n)_n \in \ell_\infty$ for convergente, então $L((x_n)_n) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

    (c) Se $(x_n)_n \in \ell_\infty$ e $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $L((x_n)_n) \geq 0$.

    (d) Para todo $(x_n)_n \in \ell_\infty$, $L((x_n)_n) = L((x_{n+1})_n)$.

    Esse funcional é chamado de *limite de Banach*.

Dualidade - Reflexividade

11. Sejam X um espaço normado com X^* separável e Y um subespaço de X. Mostre que Y^* é separavel.

12. Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a norma $\|(x,y)\| = (|x_1|^4 + |x_2|^4)^{\frac{1}{4}}$. Calcule diretamente a norma dual de X^* usando multiplicadores de Lagrange.

13. Mostre que c^* é isométrico a l_1. Conclua que dois espaços de Banach com duais isométricos não são necessariamente isométricos.

14. Seja Y um subespaço denso de um espaço normado X. Mostre que X^* e Y^* são isométricos. Conclua que existem espaços normados X e Y tais que X^* e Y^* são isométricos, porém X e Y não são isomorfos.

15. Sejam $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de espaços de Banach e $p \in (1, \infty)$. Denotamos por $X = (\sum X_n)_p$ o espaço vetorial normado

$$X = \Big\{ (x_n)_n \,:\, x_n \in X_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum ||x_n||^p_{X_n} < \infty \Big\}$$

Munido da norma $||x|| = \left(\sum ||x_n||^p_{X_n}\right)^{\frac{1}{p}}$. Mostre que X é um espaço de Banach e que X^* é isométrico a $(\sum X_i^*)_q$, onde $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

16. Sejam X um espaço normado e B um subconjunto de X^*.

    (a) Mostre que $^\perp(B^\perp) \subseteq (^\perp B)^\perp$

    Para os item b) e c) considere $X = c_0$ e seja B o subconjunto de X^* que corresponde ao conjunto $\{(x_n)_n \in \ell_1 : \sum_{n=1} x_n = 0\}$ com a identificação canônica de c_0^* e ℓ_1.

    (b) Mostre que $^\perp(B^\perp) = B$.

    (c) Mostre que $(^\perp B)^\perp = X^*$. Assim, a inclusão em a) pode ser própria, mesmo quando B é um subespaço fechado de X^*.

17. Seja Y um subespaço de um espaço normado X. Prove que se Y e $Y^\perp$ são separáveis, então X é separável.

18. En cada caso determine T^*:

    (a) $T : \ell_1 \to \ell_2$ definida por $T((x_n)_n) = (x_n/2^n)_n$.

    (b) $T : c_0 \to c_0$ definida por $T((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$.

    (c) $T : \ell_1 \to c_0$ definida por $T((x_n)_n) = (x_{2n})_n$.

19. Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se T é injetor, então T^* é sobrejetor?

20. Seja Y um subespaço fechado de um espaço de Banach reflexivo X. Mostre que X/Y é reflexivo.

21. Sejam X um espaço normado e $\phi \in X^*$. Dizemos que ϕ atinge a norma se $||\phi|| = \max_{x \in B_X} |\phi(x)|$.

    (a) Mostre que se X é reflexivo, então qualquer elemento de X^* atinge a norma.

    (b) Mostre que $\phi \in c_0^* = \ell_1$ atinge a norma se e somente se $\phi \in c_{00}$.

22. Completamento de espaço métrico.

Sejam (X, d) um espaço métrico e 0 um ponto de X. Seja $Lip_0(X)$ o espaço das funções lipschitzianas f de X em $\mathbb{R}$ tais que $f(0) = 0$.

(a) Mostre que $\|f\| = \sup \left\{ \dfrac{|f(y) - f(x)|}{d(x, y)} : x \neq y \right\}$ define uma norma em $Lip_0(X)$.

(b) Seja $F(X) = Lip_0(X)^*$. Seja $\delta : X \to F(X)$ definida por $\delta(x) = \delta_x$, onde $\delta_x(f) = f(x)$ para qualquer $f \in Lip_0(X)$. Mostrar que δ é uma imersão isométrica.

(c) Deduzir que X admite completamento, ou seja que existe imersão isométrica de imagem densa de X em espaço completo.

(d) No caso de X ser espaço vetorial normado, de d ser a distância da norma, e de 0 ser o 0 da estrutura linear em X, δ é linear?

Sugestões

1.) Considere o conjunto de todos os subconjuntos linearmente independentes de X, com a ordem parcial de inclusão entre conjuntos.

6.) Se X é separável, segue do exercício 21 da lista 1 que S_X é separável. Considere $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto denso em S_X. Aplique o teorema de Hanh-Banach para obter $f_n \in S_{X^*}$ associado a cada x_n.

8.) Seja $M = \ker f$. Se $x \in M$ o resultado é claro. Em outro caso, use Hahn-Banach para obter $g \in S_{X^*}$ tal que g se anula em M e $g(x) = dist(x, M)$. Mostre que $f = \lambda g$ e que $|\lambda| = 1$.

10.) Considere inicialmente o caso real. Seja $M = \{(x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \ldots) : (x_n)_n \in \ell_\infty\}$. Mostre que $dist(e, M) = 1$, onde $e = (1, 1, 1, \ldots)$. Use Hahn-Banach para encontrar um funcional L satisfazendo a) e d). Prove que também deve satisfazer b) e c).

11.) Use que Y^* é isomorfo a $X^*/Y^\perp$

12.) Se $f(x, y) = ax + by$, mostre que $||f|| = (a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}$.

13.) Observe que $c = c_0 \bigoplus \text{span}\{e\}$ com $e = (1, 1, \ldots)$. Mostre que qualquer $\phi \in c^*$ é do tipo $\phi((x_n)_n) = a \lim_n x_n + \sum_n a_n x_n$, onde $a \in K$ e $(a_n)_n \in \ell_1$.

15.) Estude a demonstração do dual de ℓ_p, que corresponde ao caso $X_n = \mathbb{R}$.

19.) Não, Considere a aplicação identidade de ℓ_1 em ℓ_2.

20.) $(X/Y)^* = Y^\perp$.

21. a) Usar Hahn-Banach e a imersão canônica de X em X^{**}.

22 b) Considere $f_x \in Lip_0(X)$ definida por $f_x(t) = d(x, t) - d(x, 0)$.

c) Considere $\overline{\delta(X)}$ e observe que $F(X)$ é de Banach.

d) Não, desde que $\dim X \geq 1$.