MAT0334 - MAT5721: Introdução à Análise Funcional - 2019
Operadores contínuos em espaços normados - Lista 2

Wilson Cuellar

1. Seja $(X, ||\,.\,||)$ um espaço de Banach com base de Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) Para cada $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n \in X$, considere $|||x||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{k=1}^{n} x_k e_k||$. Mostre que $|||\,.\,|||$ é uma norma em X.

   b) Prove que $(X, |||\,.\,|||)$ é um espaço de Banach.

   d) Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $P_n : X \to X$ definido por

$$P_n\left(\sum_{k=1}^{+\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

   Mostre que cada P_n é contínuo em $(X, |||\,.\,|||)$ e que para todo $n \in \mathbb{N}$ a norma de P_n é 1.

2. Seja X um espaço normado.

   a) Mostre que qualquer hiperplano de X ou é fechado ou é denso em X.

   b) Seja f um funcional não contínuo em X. Mostre que $\ker f$ é denso em X.

3. Seja X um espaço normado. Mostre que todos os hiperplanos fechados em X são isomorfos entre si.

4. Sejam X e Y espaços normados. Prove que um operador $T : X \to Y$ é contínuo se e somente $T(A)$ é um conjunto limitado em Y para cada $A \subseteq X$ conjunto limitado em X.

5. Mostre que o operador $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ definido por $T((x_n)_n) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ é linear e contínuo.

6. Mostre a imagem de um operador contínuo $T : X \to Y$ entre espaços normados não é necessariamente um subespaço fechado em Y.

7. Sejam X e Y espaços normados com X de dimensão infinita e $Y \neq \{0\}$. Mostre que existe uma aplicação linear de X em Y *descontínua*.

8. Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (5x-2y+2z, 2x-y, x+y+z)$

   a) Calcule $\|T\|$ se $\mathbb{R}^3$ é munido da norma $\|\,.\,\|_\infty$.

   b) Calcule $\|T\|$ se $\mathbb{R}^3$ é munido da norma $\|\,.\,\|_1$.

   c) Qual é a norma de uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se $\mathbb{R}^n$ é munido da norma $\|\,.\,\|_\infty$ ou de $\|\,.\,\|_1$?

9. Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Suponha que existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq \delta\|x\|$ para todo $x \in X$. Prove que $T(X)$ é fechado em Y e que T é um isomorfismo de X sobre sua imagem.

10. Mostre que se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, então $\|T\| = \sup_{x\in S_X} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\|$.

11. Sejam X e Y espaços normados. Mostre que se $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(X, Y)$, então $T_n(x) \to T(x)$, para todo $x \in X$. Ou seja, a convergência em $\mathcal{L}(X, Y)$ implica na convergência pontual. Mostre que a recíproca não é verdadeira.

12. Sejam X, Y e Z espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Sejam $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Prove que $S \circ T \in \mathcal{L}(X, Z)$ e $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$. Dê um exemplo para mostrar que a desigualdade pode ser estrita.

13. Mostre que c e c_0 são isomorfos mas não isométricos.

14. Seja Y um espaço normado. Prove que Y é um espaço de Banach se e somente se $\mathcal{L}(X, Y)$ é de Banach para todo X espaço normado.

15. Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X. Seja $\pi : X \to X/Y$ definida por $\pi(x) = \overline{x}$. Mostre que π é contínua e aberta.

16. Um operador é chamado de posto finito se sua imagem tem dimensão finita. Mostre que se um operador tem posto finito, ele é contínuo se e somente se seu núcleo é fechado.

17. Sejam X e Y espaços normados. Prove que o conjunto das aplicações lineares e contínuas de posto finito de X em Y é um subespaço de $\mathcal{L}(X, Y)$. É fechado?

18. Admitimos a existência da compactificação de Stone-Čech dos números naturais $\mathbb{N}$, denotada por $\beta\mathbb{N}$: o único (a menos de homeomorfismos) espaço topológico compacto que contém $\mathbb{N}$ densamente com a propriedade que qualquer função limitada de $\mathbb{N}$ em $[0, 1]$ se estende a uma função contínua em $\beta\mathbb{N}$. Mostre que ℓ_∞ é linearmente isométrico a $C(\beta\mathbb{N})$.

Sugestões

6.) Use T do exercício 5

7.) Use uma base algébrica de X e construa uma aplicação linear não limitada.

10.) Dado $\epsilon > 0$, encontre $x \in B_X$ tal que $\|T(x)\|_Y \geq \sqrt{1-\epsilon}\|T\|$. Assim, $\|\sqrt{1-\epsilon}x\| < 1$ e $\frac{x}{\|x\|_X} \in S_X$, e para ambos vetores $\|T(y)\|_Y \geq (1-\epsilon)\|T\|$.

11.) Considere a sequência $(f_m)_m$, onde $f_m : c_0 \to \mathbb{K}$ é definido por $f_m((x_n)_n) = x_m$.

13.) Para qualquer $x \in c_0$ de norma 1, existem $a \neq b \in c_0$, $\|a\| = \|b\| = 1$ com $x = (a+b)/2$.

14.) Use $X = \mathbb{R}$.

16.) Numa direção usar um isomorfismo linear (algébrico) canônico entre $X/\ker T$ e TX e o exercício 15.