MAT0334 - MAT5721: Introdução à Análise Funcional
Prova 3 - Junho 18 de 2019

Prof. Wilson Cuellar
Monitora: Rafaela Gesing

Justifique todas suas afirmações.

I) Seja H um espaço de Hilbert, com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e seja $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência ortonormal em H.

1. Mostre que o conjunto $\{e_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ é fechado e limitado mas não é compacto em H.

   Resolução: Seja $A=\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$

   - A é limitado: Com efeito, para todo $n\in\mathbb{N}$ temos $\|e_n\|^2=\langle e_n,e_n\rangle=1$.
   - A é fechado: Seja $x\in\overline{A}$. Então existe sequência $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ em A tal que $e_{n_k}\to x$ quando $k\to\infty$. Em particular, a sequência $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em H; assim, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

     $$\|e_{n_k}-e_{n_j}\|<1,\ \forall k,j\geq k_0 \tag{1}$$

     Agora, note que se $e_i\neq e_j$, então

     $$\|e_i-e_j\|^2=\langle e_i,e_i\rangle-\langle e_i,e_j\rangle-\langle e_j,e_i\rangle+\langle e_j,e_j\rangle=2\ \Rightarrow\ \|e_i-e_j\|>1,$$

     Portanto, para que satisfaça (1), a sequência $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ deve ser constante a partir de k_0. Assim, $x=e_{n_{k_0}}\in A$, de onde segue que A é fechado.
   - A não é compacto: Se, para todo $n\in\mathbb{N}$, $B(e_n,1)$ denota a bola aberta de centro e_n e raio 1, temos que $\{B(e_n,1):n\in\mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de A. Suponha que existam $n_1,\cdots n_k\in\mathbb{N}$ tais que $A\subseteq\bigcup_{j=1}^{k}B(e_{n_j},1)$. Então, para $e_j\notin\{e_{n_1},\cdots e_{n_k}\}$ temos que existe $l\in\{n_1,\cdots n_k\}$ tal que $\|e_j-e_l\|<1$, mas isso contradiz o fato de que $\|e_j-e_l\|=\sqrt{2}>1$. Portanto, $\{B(e_n,1):n\in\mathbb{N}\}$ é cobertura de A que não possui subcobertura finita, isto é, A não é compacto.

2. Prove que para cada $x\in H$

   $$\lim_{n\to\infty}\langle x,e_n\rangle=0.$$

   (**Sugestão**: Desigualdade de Bessel.)

   Resolução: Da Desigualdade de Bessel temos que

   $$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2\leq\|x\|^2,\ \forall x\in H.$$

   Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$ é convergente, de onde segue que os termos da série devem convergir à zero, isto é, $|\langle x,e_n\rangle|\to 0$ quando $n\to\infty$; e portanto, $\langle x,e_n\rangle\to 0$ quando $n\to\infty$.

3. Seja $T\in\mathcal{K}(H)$. Mostre que $\lim_{n\to\infty}\|T(e_n)\|=0$.

   Resolução: Suponha que $\lim_{n\to\infty}\|T(e_n)\|>0$; então existe $\epsilon>0$ e uma subsequência $(e_{n_k})_k$ de $(e_n)_n$ tal que $\|T(e_{n_k})\|\geq\epsilon$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Como $(e_{n_k})_k$ é uma sequência limitada e T é operador compacto, existe uma subsequência $(e_{n_{k_l}})_l$ de $(e_{n_k})_k$ tal que $T(e_{n_{k_l}})\to z\neq 0$ quando $l\to\infty$. No entanto, pelo item anterior, colocando $x=T^*(z)\in H$, temos

   $$0=\lim_{l\to\infty}\langle T^*(z),e_{n_{k_l}}\rangle=\lim_{l\to\infty}\langle z,T(e_{n_{k_l}})\rangle=\langle z,z\rangle>0$$

   e temos uma contradição. Portanto, $\lim_{n\to\infty}\|T(e_n)\|=0$.

II) Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(H)$ é de *Hilbert-Schmidt* se existe uma base ortonormal $(e_n)_n$ de H tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 < \infty.$$

Donotemos por $\mathcal{HS}(H)$ o conjunto de operadores de Hilbert-Schmidt de H.

1. Sejam $(f_n)_n$ e $(g_n)_n$ duas bases ortonormais de H e seja $T \in \mathcal{HS}(H)$. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(f_n)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T(g_m)\|^2$. Conclusão?

   Resolução: Pela Identidade de Parseval, temos

$$\|T(f_n)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle T(f_n), g_m\rangle|^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|T(f_n)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |\langle T(f_n), g_m\rangle|^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |\langle f_n, T^*(g_m)\rangle|^2\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_n, T^*(g_m)\rangle|^2\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^*(g_m)\|^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

   Em particular, tomando $f_n = g_n$ em (2), segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T(g_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^*(g_n)\|^2 \qquad (3)$$

   Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T(f_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^*(g_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T(g_n)\|^2.$$

   Concluímos que a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(f_n)\|^2$ é independente da escolha da base.

2. (a) Mostre que $\mathcal{HS}(H)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(H)$ e que $\mathcal{HS}(H) \neq \mathcal{L}(H)$.

   Resolução:
   Segue da definição que $\mathcal{HS}(H) \subseteq \mathcal{L}(H)$.
   É imediato que $T \equiv 0 \in \mathcal{HS}(H)$.
   Sejam $T, S \in \mathcal{HS}(H)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ e seja $(e_n)_n$ uma base ortonormal de H.
   Para a, b reais positivos e $1 < p < \infty$, temos a desigualdade

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p).$$

   Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda T(e_n) + S(e_n)\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\lambda|\|T(e_n)\| + \|S(e_n)\|\right)^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(|\lambda|^2\|T(e_n)\|^2 + \|S(e_n)\|^2\right) \\ &= 2|\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \|S(e_n)\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

   Portanto, $\lambda T + S \in \mathcal{HS}(H)$, de onde segue que $\mathcal{HS}(H)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(H)$.
   Por fim, note que $Id \in \mathcal{L}(H)$, mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Id(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

   e portanto, $Id \notin \mathcal{HS}(H)$, de onde segue que $\mathcal{HS}(H) \neq \mathcal{L}(H)$.

(b) Sejam $T \in \mathcal{HS}(H)$ e $S \in \mathcal{L}(H)$. Mostre que T^*, $S \circ T$ e $T \circ S$ são operadores de Hilbert-Schmidt.

Resolução: Seja $(e_n)_n$ uma base ortonormal de H.

Da equação (3) e do fato de $T \in \mathcal{HS}(H)$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^*(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 < \infty$$

Portanto $T^* \in \mathcal{HS}(H)$.

Agora, usando a continuidade de S, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|S(T(e_n))\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|S\|^2 \|T(e_n)\|^2 = \|S\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 < \infty$$

Portanto, $S \circ T \in \mathcal{HS}(H)$.

Por fim, note que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$, e como $S^* \in \mathcal{L}(H)$ e $T^* \in \mathcal{HS}(H)$, do que já foi provado, temos $(T \circ S)^* \in \mathcal{HS}(H)$, e portanto $(T \circ S)^{**} = T \circ S \in \mathcal{HS}(H)$.

3. (a) Seja $T \in \mathcal{F}(H)$ (isto é, T é um operador de posto finito). Mostre que existem vetores $v_1, \ldots, v_N \in H$ e um conjunto ortonormal $\{w_1, \ldots, w_N\}$ de H tais que

$$T(x) = \sum_{i=1}^{N} \langle x, v_i \rangle w_i \quad \text{para todo} \quad x \in H.$$

Resolução: Suponha que $\dim(T(X)) = N < \infty$, e seja $\{w_1, \ldots, w_N\}$ uma base ortonormal de $T(X)$. Colocando $v_i = T^*(w_i)$, para $i = 1, \ldots, N$, temos $\forall x \in H$

$$T(x) = \sum_{i=1}^{N} \langle T(x), w_i \rangle w_i = \sum_{i=1}^{N} \langle x, T^*(w_i) \rangle w_i = \sum_{i=1}^{N} \langle x, v_i \rangle w_i.$$

(b) Mostre que $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{HS}(H)$.

Resolução: Seja $T \in \mathcal{F}(H)$. Se $T(x) = \sum_{i=1}^{N} \langle x, v_i \rangle w_i$, $\forall x \in H$, então

$$\|T(x)\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{N} \langle x, v_i \rangle w_i, \sum_{i=1}^{N} \langle x, v_i \rangle w_i \rangle = \sum_{i=1}^{N} |\langle x, v_i \rangle|^2$$

Seja $(e_n)_n$ uma base ortonormal de H. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} |\langle e_n, v_i \rangle|^2 \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, v_i \rangle|^2 \right) = \sum_{i=1}^{N} \|v_i\|^2 < \infty$$

(onde a última igualdade segue da Identidade de Parseval).

Portanto, $T \in \mathcal{HS}(H)$.

4. Para os exercícios 4 a 8 fixemos uma base ortonormal $(e_n)_n$ de H. Dado $T \in \mathcal{HS}(H)$ definimos

$$\|T\|_{\mathcal{HS}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mostre que $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ define uma norma em $\mathcal{HS}(H)$ tal que $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{HS}}$.

Resolução: Sejam $T, S \in \mathcal{HS}(H)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos

- $\|T\|_{\mathcal{HS}} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 = 0 \Rightarrow \|T(e_n)\| = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow T(e_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow T \equiv 0.$
- Desigualdade triangular: Observe que se $a_n = \|T(e_n)\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $a = (a_n)_n \in \ell_2$ e temos $\|T\|_{\mathcal{HS}} = \|a\|_2$. Colocando

$$b_n = \|S(e_n)\|, \ c_n = \|(T + S)(e_n)\|, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

temos $b = (b_n)_n, c = (c_n)_n \in \ell_2$ e
$$c_n \leq a_n + b_n.$$

Pela desigualdade triangular em ℓ_2,
$$\|c\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2,$$

isto é,
$$\|T + S\|_{\mathcal{HS}} \leq \|T\|_{\mathcal{HS}} + \|S\|_{\mathcal{HS}}.$$

- $\|\lambda T\|_{\mathcal{HS}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda T(e_n)\|^2 = |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 \Rightarrow \|\lambda T\|_{\mathcal{HS}} = |\lambda| \|T\|_{\mathcal{HS}}$.

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ define uma norma em $\mathcal{HS}(H)$.

Por fim, se $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \in S_H$, da Identidade de Parseval, temos $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = 1$. Assim, da Desigualdade de Holder (com $p = q = 2$),

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle T(e_n) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle| \|T(e_n)\| \\
&\leq \left(\sum_{n=1} |\langle x, e_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|T\|_{\mathcal{HS}}
\end{aligned}$$

Portanto, $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{HS}}$.

5. Mostre que a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ em $\mathcal{HS}(H)$ é induzida por um produto interno.

   Resolução: Vamos mostrar que $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ satisfaz a Lei do Paralelogramo.

   Como H é espaço de Hilbert, sabemos que a norma $\|\cdot\|$ em H satisfaz a Lei do Paralelogramo. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos
$$2\|T(e_n)\|^2 + 2\|S(e_n)\|^2 = \|T(e_n) + S(e_n)\|^2 + \|T(e_n) - S(e_n)\|^2.$$

   De onde segue que
$$\begin{aligned}
2\|T\|_{\mathcal{HS}}^2 + 2\|S\|_{\mathcal{HS}}^2 &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \|S(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\|T(e_n)\|^2 + 2\|S(e_n)\|^2 \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|T(e_n) + S(e_n)\|^2 + \|T(e_n) - S(e_n)\|^2 \right) = \|T + S\|_{\mathcal{HS}}^2 + \|T - S\|_{\mathcal{HS}}^2.
\end{aligned}$$

   E portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ é induzida por um produto interno.

6. Mostre que $(\mathcal{HS}(H), \|\cdot\|_{\mathcal{HS}})$ é um espaço de Hilbert. (**Sugestão**: Use o fato que $\mathcal{L}(H)$ é completo.)

   Resolução: Seja $(T_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{HS}(H)$. Como $\|S\| \leq \|S\|_{\mathcal{HS}}$, $\forall S \in \mathcal{HS}(H)$, segue que $(T_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(H)$, que é Banach e portanto existe $T \in \mathcal{L}(H)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$. Vejamos que $T \in \mathcal{HS}(H)$ e $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{\mathcal{HS}} = 0$.

   Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Como $(T_n)_n$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\|T_n - T_m\|_{\mathcal{HS}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|T_n(e_i) - T_m(e_i)\|^2 < \epsilon^2, \ \forall n, m \geq n_0.$$

   Em particular, $\forall M \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=1}^{M} \|T_n(e_i) - T_m(e_i)\|^2 < \epsilon^2, \ \forall n, m \geq n_0. \tag{4}$$

   Fazendo $m \to \infty$ em (4), temos
$$\sum_{i=1}^{M} \|T_n(e_i) - T(e_i)\|^2 < \epsilon^2, \ \forall n \geq n_0. \tag{5}$$

Fazendo $M \to \infty$ em (5), temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|T_n(e_i) - T(e_i)\|^2 < \epsilon^2, \ \forall n \geq n_0. \tag{6}$$

Portanto, $T_n - T \in \mathcal{HS}(H)$, $\forall n \geq n_0$, e como $\mathcal{HS}(H)$ é espaço vetorial, segue que $T \in \mathcal{HS}(H)$.

Além disso, (6) mostra que $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{\mathcal{HS}} = 0$.

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja P_n a projeção ortogonal de H sobre $[e_1, \ldots, e_n]$. Mostre que para cada $T \in \mathcal{HS}(H)$

$$\lim_{n\to\infty} \|T - T \circ P_n\|_{\mathcal{HS}} = 0.$$

Deduza que todo operador de Hilbert-Schmidt em H é compacto.

Resolução: Temos

$$\|T - T \circ P_n\|_{\mathcal{HS}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|T(e_i) - T(P_n(e_i))\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \|T(e_i)\|^2$$

E como a série $\sum_{i=1}^{\infty} \|T(e_i)\|^2$ é convergente, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \|T - T \circ P_n\|_{\mathcal{HS}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \|T(e_i)\|^2 \right)^{1/2} = 0$$

.

Vimos que, se $S \in \mathcal{HS}(H)$, então $\|S\| \leq \|S\|_{\mathcal{HS}}$. Assim, $\lim_{n\to\infty} \|T - T \circ P_n\| = 0$, isto é, a sequência de operadores compactos $(T \circ P_n)_n$ converge uniformemente à T, e portanto, T é operador compacto.

8. Mostre um exemplo de um operador $T \in \mathcal{L}(H)$ compacto que não seja de Hilbert-Schmidt. (**Sugestão**: Considere a sequência $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ e o operador diagonal associado.)

Resolução: Mostramos em aula que operador diagonal T_a definido por $T_a(e_n) = a_n e_n$, onde $a = (a_n)_n \in \ell_\infty$ é compacto se e somente se $a \in c_0$.

Como a sequência $b = (\frac{1}{\sqrt{n}})_n \in c_0$, segue que $T_b \in \mathcal{L}(H)$ dado por $T_b(e_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ é compacto. No entanto, note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_b(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{1}{\sqrt{n}} e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

e portanto, $T_b \notin \mathcal{HS}(H)$.

Boa prova!