MAT0334 - MAT5721: Introdução à Análise Funcional
Gabarito Prova 1 - Abril 2 de 2019

Prof. Wilson Cuellar
Monitora: Rafaela Gesing

I) (2,0) Sejam X um espaço normado e A um subconjunto de X. Dizemos que $D \subseteq A$ é denso em A se para todo $a \in A$ e todo $\epsilon > 0$ existe $d \in D$ tal que $\|a - d\| < \epsilon$. Dizemos que A é *separável* se existe $D \subseteq A$ enumerável e denso em A.

1. Mostre que se X é isomorfo a um espaço normado separável Y, então X é separável.

   Resolução: Seja $T : Y \to X$ isomorfismo. Podemos supor que $Y \neq \{0\}$, e portanto, $\|T\| \neq 0$. Seja $D = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em Y. Consideremos $E = \{T(y_n) : n \in \mathbb{N}\}$. O conjunto E é enumerável, vamos mostrar que é denso em X. Sejam $x \in X$ e $\epsilon > 0$ qualquer.

   Como T é sobrejetora, existe $y \in Y$ tal que $T(y) = x$. Sendo D denso em Y, existe $y_k \in D$ tal que $\|y_k - y\|_Y < \frac{\epsilon}{\|T\|}$.

   Segue então, da continuidade de T, que

$$\|x - T(y_k)\|_X = \|T(y) - T(y_k)\|_X \leq \|T\| \, \|y - y_k\|_Y < \|T\| \frac{\epsilon}{\|T\|} = \epsilon.$$

2. Mostre que se X é separável, então todo $A \subseteq X$ é separável. (**Sugestão**: Seja $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ denso em X. Para cada $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ considere um ponto em $B\left(x_i; \frac{1}{j}\right) \cap A$, quando essa intersecção é não vazia.)

   Resolução: Seja $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em X. Definamos

$$\Delta = \left\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \, : \, B\left(x_i; \frac{1}{j}\right) \cap A \neq \emptyset\right\}.$$

   Δ é não vazio pois D é denso em X. Considere para cada $(i, j) \in \Delta$ um vetor $a_{i,j} \in B\left(x_i; \frac{1}{j}\right) \cap A$. Seja $E = \{a_{i,j} \, : \, (i, j) \in \Delta\}$. Segue que E é enumerável, vamos mostrar que é denso em A. Com efeito, sejam $a \in A$ e $\epsilon > 0$. Tomemos $l \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{l} < \frac{\epsilon}{2}$. Como D é denso em X, existe $x_k \in D$ tal que $\|x_k - a\| < \frac{1}{l}$ (note que, em particular, isto implica que $a \in B\left(x_k; \frac{1}{l}\right) \cap A \neq \emptyset$); assim, $(k, l) \in \Delta$, e temos

$$\|a_{k,l} - a\| \leq \|a_{k,l} - x_k\| + \|x_k - a\| < \frac{1}{l} + \frac{1}{l} < \epsilon.$$

II)(3,0) O objetivo deste exercício é mostrar que $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2) = \{T : \ell_2 \to \ell_2 \,|\, T \text{ é linear e contínuo}\}$ não é separável.

1. Seja $a = (a_n)_n \in \ell_\infty$. Considere $T_a : \ell_2 \to \ell_2$ definido por

$$T_a((x_n)_n) = (a_n x_n)_n.$$

   Mostre que $T_a \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$.

   Resolução:

   - T_a está bem definida: Note que, se $(x_n)_n \in \ell_2$, então para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j|\right)^2 |x_n|^2 = \|a\|_\infty^2 \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \leq \|a\|_\infty^2 \|x\|_2^2 \qquad (1)$$

     Portanto, $T_a((x_n)_n) \in \ell_2$.

- T_a é linear: Sejam $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell_2$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Temos

$$T_a(\alpha x + y) = T_a((\alpha x_n + y_n)_n) = (a_n(\alpha x_n + y_n)_n = \alpha(a_n x_n)_n + (a_n y_n)_n = \alpha T_a(x) + T_a(y)$$

- T_a é contínua: Note que (1) implica que, se $x = (x_n)_n \in \ell_2$, $\|T_a(x)\|_2^2 \leq \|a\|_\infty^2 \|x\|_2^2$, e assim

$$\|T_a(x)\|_2 \leq \|a\|_\infty \|x\|_2 \tag{2}$$

2. Mostre que se $\|a\|_\infty = 1$, então $\|T_a\| = 1$. (**Sugestão**: Dado $\epsilon > 0$, encontre $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_a(e_{n_0})\| \geq 1 - \epsilon$.)

   Resolução: Note que se $x = (x_n)_n \in \ell_2$ com $\|x\|_2 = 1$, a equação (2) no item anterior implica que $\|T_a\| \leq 1$. Para a outra desigualdade, considere $\epsilon > 0$ qualquer. Sabemos que $1 = \|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ e assim, pela propriedade do supremo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \epsilon = \|a\|_\infty - \epsilon \leq |a_{n_0}|$. Assim,

$$\|T_a(e_{n_0})\|_2^2 = \sum_n |a_n \delta_{n,n_0}|^2 = |a_{n_0}|^2 \;\Rightarrow\; \|T_a\| \geq \|T_a(e_{n_0})\|_2 \geq 1 - \epsilon.$$

   Tomando limite quando $\epsilon \to 0$, temos $\|T_a\| \geq 1$. Concluímos que $\|T_a\| = 1$.

3. Mostre que $T : \ell_\infty \to \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ definido por $T(a) = T_a$ é uma imersão isométrica linear.

   Resolução:

   - T é linear: Sejam $a = (a_n)_n, b = (b_n)_n \in \ell_\infty$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x = (x_n)_n \in \ell_2$. Temos

$$T(\alpha a + b)(x) = T_{\alpha a+b}(x) = ((\alpha a_n + b_n)x_n)_n = \alpha(a_n x_n)_n + (b_n x_n)_n = \alpha T_a(x) + T_b(x)$$

     Portanto, $T(\alpha a + b) = \alpha T(a) + T(b)$.

   - T é isometria (e portanto, injetora): Do exercício anterior, temos que $\left\|T(\frac{a}{\|a\|_\infty})\right\| = 1$ para todo $a \in \ell_\infty$, $a \neq 0$. Segue da linearidade de T que $\|T(a)\| = \|a\|_\infty$ para todo $a \in \ell_\infty$.

4. Conclua usando o exercício anterior.

   Resolução: Suponha que $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ é separável. Da questão II)2. temos que $T(\ell_\infty) \subseteq \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ é separável. Como T é isomorfismo isométrico sobre a imagem de T, da questão II)1. segue que ℓ_∞ é separável e portanto temos uma contradição.

III) (2,0)Seja $(X, \|\centerdot\|)$ um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_n)_n$ de elementos de X satisfaz a propriedade $(*)$ se

$$\|x_n - x_{n+1}\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

1. Mostre que toda sequência que satisfaz a propriedade $(*)$ é de Cauchy.

   Resolução: Sejam $(x_n)_n$ uma sequência com a propriedade $(*)$, $\epsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$. Sejam $m > n > n_0$ naturais. Podemos escrever $m = n + k$, para $k \geq 1$; assim,

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_{n+k}\| &\leq \underbrace{\|x_n - x_{n+1}\|}_{<\frac{1}{2^n}} + \cdots + \underbrace{\|x_{n+k-2} - x_{n+k-1}\|}_{<\frac{1}{2^{n+k-2}}} + \underbrace{\|x_{n+k-1} - x_{n+k}\|}_{<\frac{1}{2^{n+k-1}}} \\ &< \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^{n+j}} = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon\end{aligned}$$

   Portanto, $(x_n)_n$ é de Cauchy.

2. Seja $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy em X. Mostre que $(x_n)_n$ possui uma sub-sequência que satisfaz a propriedade $(*)$. (**Sugestão**: Encontre uma sequência crescente de naturais $(N_k)_k$ tal que $\|x_{N_k} - x_m\| < \frac{1}{2^k}$ para todo $m > N_k$.)

   Resolução: Como $(x_n)_n$ é de Cauchy, dado $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2},\ \forall n, m \geq N_1.$$

Tomando agora $\epsilon_2 = \frac{1}{2^2}$, existe $N_2 > N_1$ tal que

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^2}, \ \ \forall n, m \geq N_2.$$

Desta forma, construimos indutivamente uma sequência crescente $(N_k)_k$ de naturais tal que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}, \ \forall n, m \geq N_k \tag{3}$$

Em particular, (3) implica que

$$\|x_{N_k} - x_{N_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a subsequência $(x_{N_k})_k$ satisfaz $(*)$.

3. Mostre que X é completo se e somente se toda sequência que satisfaz a propriedade $(*)$ converge.

   Resolução: $(\Rightarrow)$ Suponha que X é completo e considere $(x_n)_n$ uma sequência que satisfaz $(*)$, então, por 1., $(x_n)_n$ é de Cauchy e como X é completo, $(x_n)_n$ é convergente.

   $(\Leftarrow)$ Suponha que toda sequência que satisfaz $(*)$ é convergente. Seja $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy em X e $\epsilon > 0$ qualquer, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall n, m \geq n_0.$$

   Por 2., existe uma subsequência $(x_{N_k})_k$ que satisfaz $(*)$ e portanto, por hipótese, existe $x \in X$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|x_{N_k} - x\| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall k \geq k_0.$$

   Assim, se $n, N_k, k \geq \max\{n_0, k_0\}$,

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{N_k}\| + \|x_{N_k} - x\| < \epsilon,$$

   isto é, $(x_n)_n$ é convergente e X é completo.

IV)(3,0) Dado um número real $\alpha > 0$, seja $C^{0,\alpha}([0,1])$ o espaço das funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que existe $M \geq 0$ tal que

$$|f(s) - f(t)| \leq M|s-t|^\alpha \ \text{ para todos } \ s, t \in [0,1].$$

Quando $\alpha = 1$ esse espaço corresponde as funções Lipschitz em $[0,1]$.

1. Mostre que para todo $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}([0,1])$ é um subespaço vetorial de $C[0,1]$.

   Resolução: Seja $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$, observemos que f é uniformemente contínua em $[0,1]$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \left(\frac{\epsilon}{M+1}\right)^\alpha$. Assim, se $|s-t| < \delta$ então $|f(s) - f(t)| < \epsilon$. É claro que $f \equiv 0 \in C^{0,\alpha}([0,1])$. Sejam $f, g \in C^{0,\alpha}([0,1])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então existem $N, M \geq 0$ tais que

$$|f(s) - f(t)| \leq M|s-t|^\alpha \ \text{ para todos } \ s, t \in [0,1].$$

$$|g(s) - g(t)| \leq N|s-t|^\alpha \ \text{ para todos } \ s, t \in [0,1].$$

   Assim, se $s, t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |(\lambda f + g)(s) - (\lambda f + g)(t)| &\leq |\lambda||f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)| \\ &\leq |\lambda| M|s-t|^\alpha + N|s-t|^\alpha = (|\lambda|M + N)|s-t|^\alpha, \end{aligned}$$

   isto é, $\lambda f + g \in C^{0,\alpha}([0,1])$.

2. Para cada $\alpha > 0$, defina $\| \cdot \| : C^{0,\alpha}([0,1]) \to \mathbb{R}$ por

$$\|f\| = |f(0)| + \sup\left\{ \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha} : s, t \in [0,1], \, s \neq t \right\}.$$

   Prove que $\| \cdot \|$ é uma norma em $C^{0,\alpha}([0,1])$.

   Resolução: Sejam $f, g \in C^{0,\alpha}([0,1])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\|f\| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$:

$$\begin{aligned}
0 = \|f\| &= |f(0)| + \sup\left\{\frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha} : s, t \in [0,1],\ s \neq t\right\} \\
&\Rightarrow |f(0)| = 0 \text{ e } \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha} = 0 \ \ \forall s, t \in [0,1],\ s \neq t \\
&\Rightarrow f(0) = 0 \text{ e } |f(s) - f(t)| = 0 \ \ \forall s, t \in [0,1],\ s \neq t \\
&\Rightarrow 0 = |f(s) - f(0)| = |f(s)|, \forall s \in [0,1] \ \Rightarrow \ f(s) = 0 \ \forall s \in [0,1]
\end{aligned}$$

- $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$:

$$\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \sup\left\{\frac{|\lambda f(s) - \lambda f(t)|}{|s-t|^\alpha} : s, t \in [0,1],\ s \neq t\right\} = |\lambda|\,\|f\|$$

- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$:

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= |f(0) + g(0)| + \sup\left\{\frac{|f(s) + g(s) - f(t) - g(t)|}{|s-t|^\alpha} : s, t \in [0,1],\ s \neq t\right\} \\
&\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup\left\{\frac{|f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)|}{|s-t|^\alpha} : s, t \in [0,1],\ s \neq t\right\} \\
&\leq \|f\| + \|g\|
\end{aligned}$$

3. Seja $a \in [0,1]$, considere $f_a : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_a(t) = |t - a|$. Mostre que $f_a \in C^{0,1}([0,1])$, e que $\|f_a\| = 1 + a$.

   Resolução: Para todo $s, t \in [0,1]$ temos pela desigualdade triângular inferior

$$|f_a(s) - f_a(t)| = ||s-a| - |t-a|| \leq |s - a - (t - a)| = |s - t|,$$

   portanto, $f_a \in C^{0,1}([0,1])$ e

$$\begin{aligned}
\|f_a\| &= |f_a(0)| + \sup\left\{\frac{|f_a(s) - f_a(t)|}{|s-t|} : s, t \in [0,1],\ s \neq t\right\} \\
&\leq a + 1.
\end{aligned}$$

   Observemos que o supremo acima é igual a 1. De fato, se $s \neq a$ então

$$\frac{|f_a(s) - f_a(a)|}{|s-a|} = \frac{|s-a|}{|s-a|} = 1.$$

   Portanto, $\|f_a\| = a + 1$.

4. Mostre que $C^{0,1}([0,1])$ com a norma definida no item 2 é um espaço de Banach.

   Resolução: Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $C^{0,1}([0,1])$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ para todo $n, m \geq n_0$. Em particular,

$$|f_n(0) - f_m(0)| < \epsilon \tag{4}$$
$$|f_n(s) - f_m(s) - f_n(0) + f_m(0)| \leq |s|\epsilon \tag{5}$$

   para todo $n, m \geq n_0$ e qualquer $s \in [0,1]$. Por desigualdade triângular e equações (4) e (5), obtemos

$$|f_n(s) - f_m(s)| < (1 + |s|)\epsilon, \quad \forall n, m \geq n_0 \ \ \forall s \in [0,1].$$

   Assim, $(f_n(s))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ para todo $s \in [0,1]$; como $\mathbb{R}$ é completo, existe $\lim_n f_n(s)$. Definamos $f(s) = \lim_n f_n(s)$.

   Vamos mostrar que $f \in C^{0,1}([0,1])$. Como (f_n) é sequência de Cauchy em $C^{0,1}([0,1])$, (f_n) é uma sequência limitada, isto é, existe $M \geq 0$ tal que $\|f_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, para todo $s, t \in [0,1]$, e todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|f_n(s) - f_n(t)| \leq M|s-t|$$

   Passando ao limite em n, obtemos que $|f(s) - f(t)| \leq M|s - t|$, para todo $s, t \in [0,1]$, e assim, $f \in C^{0,1}([0,1])$.

Por fim, vamos mostrar que $f_n \to f$. Sabemos que para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ para todo $n, m \geq n_0$. Note que se $s \neq t$, então

$$|f_n(0) - f_m(0)| + \frac{|f_n(s) - f_m(s) - f_n(t) + f_m(t)|}{|s-t|} \leq \|f_n - f_m\| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0$$

Portanto, fixado $m \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\lim_n \left[|f_n(0) - f_m(0)| + \frac{|f_n(s) - f_m(s) - f_n(t) + f_m(t)|}{|s-t|} \right] &= |f(0) - f_m(0)| \\ &\quad + \frac{|f(s) - f_m(s) - f(t) + f_m(t)|}{|s-t|} \leq \epsilon\end{aligned}$$

Assim, $\|f_m - f\| \leq \epsilon$ para todo $m \geq n_0$. Portanto $f = \lim_n f_n$ em $C^{0,1}([0,1])$. Concluímos que $C^{0,1}([0,1])$ é de Banach pois toda sequência de Cauchy é convergente.

Boa prova!