Curso de Verão 2018 - Tópicos de Álgebra Linear
Prova 2

Fevereiro 23 de 2018

Escolha apenas 5 (cinco) questões. Justifique todas suas afirmações.

1. **(2,0)** Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em V. Prove que, se T possui n autovalores distintos, então T é diagonalizável.

2. **(2,0)** Seja V um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

   (a) Se $u, v \in V$ são tais que $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\langle u, v\rangle = 1$, então $u = v$.

   (b) Os vetores $\|u\|v + \|v\|u$ e $\|u\|v - \|v\|u$ são ortogonais para quaisquer $u, v \in V$.

   (c) Se U e W são subespaços de V, então $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

   (d) Se $T, S \in \mathcal{L}(V)$ são operadores auto-adjuntos tais que $T^2 + S^2 = 0$, então $T = S = 0$.

3. **(2,0)** Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Encontre uma matriz $B \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$.

4. **(2,0)** Sejam $(V. \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ dois espaços vetoriais com produto interno sobre $\mathbb{C}$.

   (a) Seja $S \in \mathcal{L}(V, W)$ uma transformação linear injetora. Mostre que a aplicação $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ dada por $\varphi(u, v) = \langle Su, Sv\rangle_2$, define um produto interno em V.

   (b) Suponha que V e W são espaços vetoriais de dimensão n. Prove que existe um isomorfismo $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $\langle Tu, Tv\rangle_2 = \langle u, v\rangle_1$ para todos $u, v \in V$.

5. **(2,0)** Considere $\mathbb{C}^2$ munido do produto interno usual. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ o operador linear em $\mathbb{C}^2$ dado por $T(w, z) = (w - iz, z - iw)$ para todos $w, z \in \mathbb{C}$. Mostre que T é normal e encontre uma base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ formada por autovetores de T.

6. **(2,0)** Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno. Seja W um subespaço de dimensão finita de V e seja $P_W \in \mathcal{L}(V)$ a projeção ortogonal de V sobre W. Determine os autovalores e autovetores do operador linear $T = 2P_W - Id$, onde Id denota a identidade.

7. **(2,0)** Seja V um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em V. Prove que T é auto-adjunto se e somente se

$$\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$$

   para todo $v \in V$.

Boa prova!