Prova 1
Curso de Verão 2018 - Tópicos de Álgebra Linear
24/01/2018

Escolha apenas 5 (cinco) questões. Justifique todas as suas afirmações.

1. **(2,0)** Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

   (a) Sejam W_1 e W_2 subespaços de V. Prove que $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V *se, e somente se,* $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

   (b) Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subespaços de V com a seguinte propriedade: *dados* $W_1, W_2 \in \mathcal{C}$, *então existe* $W_3 \in \mathcal{C}$ *tal que* $W_1 \cup W_2 \subseteq W_3$. Prove que $\bigcup_{W \in \mathcal{C}} W$ é subespaço de V.

2. **(2,0)** Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e considere no conjunto $V_{\mathbb{C}} = \{(x, y) : x, y \in V\}$ as seguintes operações de adição e multiplicação por um número complexo:

   - $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V_{\mathbb{C}}$;
   - $(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$, para todos $(x, y) \in V_{\mathbb{C}}$ e todo $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$.

   (a) Mostre que $V_{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

   (b) Seja $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ um subconjunto l.i.. Mostre que $\{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_n, 0)\}$ e $\{(0, v_1), (0, v_2), \ldots (0, v_n)\}$ são subconjuntos l.i. em $V_{\mathbb{C}}$.

   (c) Mostre que se V tem dimensão n, então $V_{\mathbb{C}}$ tem dimensão n.

3. **(2,0)**

   (a) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador. Mostre que se T é de posto 1, então existe um escalar α tal que $T^2 = \alpha T$.

   (b) Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador não nulo tal que $T^2 = 0$. Mostre que $\dim(\text{Im } (T)) = 1$ e $\dim(\text{Nuc } (T)) = 2$.

4. **(2,0)** Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador tal que $T^2 = -Id$.

   (a) Mostre que a dimensão de V é par.

   (b) Suponha que $\dim(V) = 2$. Mostre que $\{v, Tv\}$ é uma base de V qualquer que seja $0 \neq v \in V$.

5. **(2,0)** Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^n = 0$ e $T^{n-1} \neq 0$. Seja $v \in V$ tal que $T^{n-1}(v) \neq 0$. Prove que o conjunto

$$B = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$$

   é uma base de V.

6. **(2,0)** Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

(a) Se V e W são dois $\mathbb{K}$-espaços vetorias e $U \in \mathcal{L}(V, W)$ é um isomorfismo. Então a função $T \mapsto UTU^{-1}$ é um isomorfismo de $\mathcal{L}(V, V)$ sobre $\mathcal{L}(W, W)$.

(b) Se W_1, W_2, W_3 são subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V, então

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2 + W_3) = {} & \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 \\ & - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_2 \cap W_3) \\ & + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)\end{aligned}$$

(c) Existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$ uma transformação linear tal que

$$\text{Nuc } (T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \, : \, x_1 = 3x_2 \text{ e } x_3 = x_4 = x_5\}.$$

7. **(2,0)** Seja $V = \mathbb{R}_2[x]$ e tome $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ definidos por

$$f_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\ dx, \quad f_2(p(x)) = \int_0^2 p(x)\ dx, \quad f_3(p(x)) = \int_{-1}^0 p(x)\ dx$$

   (a) Mostre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de V^*.

   (b) Exiba base de V da qual $\{f_1, f_2, f_3\}$ seja a base dual.

8. **(2,0)** Sejam $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_1 = (0, 1, -2)$ e $u_1 = (-1, 1, 0)$ vetores em $\mathbb{R}^3$.

   (a) Verifique se o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente independente. Caso afirmativo, calcule a base dual $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.

   (b) Seja $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ um funcional linear, satisfazendo $f(u_1) = 1$, $f(u_2) = -1$ e $f(u_3) = 3$. Determine $f(x, y, z)$, para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   (c) Se $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ é um funcional linear, tal que $f(u_1) = 0 = f(u_2)$ e $f(u_3) \neq 0$, mostre que $f(2, 3, -1) \neq 0$.

9. **(2,0)** Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Tome $f_1, \ldots, f_n \in V^*$. Então o conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é LD quando

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Nuc}(f_i) \neq \{0\}.$$

Boa prova!