Curso de Verão 2018 - Tópicos de Álgebra Linear - Lista 6

5 de fevereiro de 2018

1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Verifique se as aplicações abaixo definem um produto interno em $\mathbb{R}^n$.
   (a) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i|y_i|$.
   (b) $\langle x, y\rangle = |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i|$.
   (c) $\langle x, y\rangle = (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)$.

2. Considere o espaço vetorial
$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(-1) = p(1) = 0\}.$$
   (a) Mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{R}$ definida por
$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)dx \quad \text{para todo} \quad p, q \in U,$$
   é um produto interno em U.
   (b) Determine uma base para o complemento ortogonal de $[1 - x^2]$ em U.

3. (a) Mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por
$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad \text{para todo} \quad p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),$$
   define um produto interno em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Determine uma base para $[1 + x, 1 - x^2]^\perp$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

4. Considere $\mathcal{C}([1, e], \mathbb{R})$, munido do produto interno
$$\langle f, g\rangle = \int_{1}^{e} ln(t)f(t)g(t)dt.$$
   Determine as funções da forma $g(x) = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, que são ortogonais à função $f(x) = 1$.

5. Considere $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno
$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad \forall\, p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$
   (a) Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt na base $\{1, x, x^2, x^3\}$ para achar uma base ortonormal de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Seja S o subespaço $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(-1) = p(1) = 0\}$. Dado o polinômio $q(x) = 1 + 2x - x^2$, determine $p(x) \in S$ e $r(x) \in S^\perp$, tais que $q(x) = p(x) + r(x)$.

6. Considere $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ com o produto interno usual. Determine uma função da forma $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ que seja ortogonal com a função $g(x) = x^2$.

7. Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos em um espaço vetorial V com produto interno. Seja $v \in V$ um vetor qualquer. Prove que
$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, v_k \rangle|^2}{\|v_k\|^2} \leq \|v\|^2.$$

8. Seja V um espaço real com produto interno. Sabendo que $\|u\| = 3$ e $\|v\| = 5$, onde $u, v \in V$, determine $\alpha \in \mathbb{R}$, de maneira que $\langle u + \alpha v, u - \alpha v \rangle = 0$.

9. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço com produto interno. Dados $u, v \in V$. Prove que $\langle u, v \rangle = 0$ se, e somente se,
$$\|u\| \leq \|u + \alpha v\|$$
para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

10. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador injetor. Mostre que a aplicação $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ dada por $\varphi(u, v) = \langle T(u), T(v) \rangle$, define um produto interno em V.

11. Considere o espaço $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ com o produto interno usual. Mostre que os seguintes conjuntos $\{\sin\theta, \sin 2\theta, \ldots, \sin n\theta, \ldots\}$ e $\{1, \cos\theta, \cos 2\theta, \ldots, \cos n\theta, \ldots\}$ são ortogonais.

12. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ quaisquer. Mostre que
$$\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\right)^2 \leq \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}{n},$$
utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$.

13. Considere $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno
$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad \text{para todo} \quad p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$
Obtenha uma base ortogonal para esse espaço a partir da base canônica.

14. Sejam V um espaço vetorial de dimensão com produto interno, U, W subespaços vetoriais de V. Prove que $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

15. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço com produto interno e sejam U e W subespaços de V tais que $U \subseteq W^\perp$ e $V = W + U$. Mostre que $U = W^\perp$.

16. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\|Tv\| \leq \|v\|$ para todo $v \in V$. Prove que $T - \sqrt{2}I$ é inversível.

17. Encontre um polinômio $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que
$$\int_0^1 p(x)(\cos \pi x)dx = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$
para todo $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

18. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço de dimensão finita. Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ produtos internos em V tais que para quaisquer $v, w \in V$, $\langle v, w \rangle_1 = 0$ se, e somente se, $\langle v, w \rangle_2 = 0$. Prove que existe um número positivo c tal que $\langle v, w \rangle_1 = c \langle v, w \rangle_2$ para todos $v, w \in V$.

19. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\{(1, 2, 3, -4), (-5, 4, 3, 2)\}$. Encontre uma base ortonormal de U e uma base ortonormal de $U^\perp$.

20. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$. Encontre uma base ortogonal para $S^\perp$.

21. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço de dimensão finita e U um subespaço de V. Prove que $P_{U^\perp} = I - P_U$, onde I é o operador identidade em V.

22. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\{(1,1,0,0), (1,1,1,2)\}$. Encontre $u \in U$ que melhor se aproxima de $(1,2,3,4)$.

23. Considere $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Determine a função de $W = [1, \sin t, \cos t]$ que melhor se aproxima de $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t - 1$.

24. Sejam U e V espaços vetoriais com produto interno e $T : U \to V$ uma função tal que $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para todos $u, v \in U$. Mostre que T é linear.

25. Prove que um operador $T \in \mathcal{L}(V)$, num espaço vetorial de dimensão finita V com produto interno, tem posto 1 se, e somente se, existem vetores não nulos $w, z \in V$ tais que $Tv = \langle v, w \rangle\, z$ para todo $v \in V$.