Curso de Verão 2018 - Tópicos de Álgebra Linear
Polinômios característico e minimal; Teorema de Cayley-Hamilton

1. Em cada um dos seguintes casos, sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ operadores lineares representados nas respectivas bases canônicas pela matriz A. Para cada operador, encontre o polinômio característico e os autovalores, e para cada autovalor, determine os autovetores associados e uma base para cada autoespaço.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representado na base canônica pela matriz A. Para cada item abaixo, determine se T é diagonalizável. Em caso positivo, calcule uma base de autovetores e a sua forma diagonal.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

   (f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Seja $T : V \to V$ um operador linear, com $\dim(V) = n$. Prove que, se T possui n autovalores distintos, então T é diagonalizável.

4. Seja $A \in M(2, \mathbb{R})$ simétrica, isto é $A = A^t$. Mostre que A é diagonalizável.

5. Sejam $A, B \in M(n, \mathbb{K})$. Prove que AB e BA tem os mesmos autovalores em $\mathbb{K}$. Elas tem o mesmo polinômio característico? E o minimal?

6. Sejam $A \in M(n, \mathbb{K})$ e $p \in \mathbb{K}[x]$. Mostre que se λ é um autovalor de A, então $p(\lambda)$ é um autovalor de $p(A)$. O que se pode dizer sobre a recíproca dessa afirmação?

7. Exiba uma matriz A não diagonalizável tal que A^2 seja diagonalizável.

8. Seja T um operador linear em $\mathbb{R}^4$ representado na base canônica por $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$. Quais são as condições em a, b, c para que T seja diagonalizável?

9. Seja $D \in M(n, \mathbb{K})$ uma matriz diagonal com polinômio característico $p_D(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \cdots (t - \lambda_k)^{d_k}$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são distintos. Considere $W = \{X \in M(n, \mathbb{K}) : DX = XD\}$. Mostre que $\dim(W) = d_1^2 + \cdots + d_k^2$.

10. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, calcule A^{2018}.

11. Calcule os polinômios característico e minimal do operador identidade num espaço vetorial de dimensão finita.

12. Sejam $a, b, c \in \mathbb{K}$ e considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$. Mostre que os polinômios característico e minimal de A coincidem.

13. Encontre uma matriz 3×3 cujo polinômio minimal seja t^2.

14. Seja $A \in M(n, \mathbb{K})$ inversível. Prove que existe um polinômio $p \in \mathbb{K}[x]$ tal que $A^{-1} = p(A)$.

15. Mostre que uma matriz $A \in M(n, \mathbb{K})$ é inversível se, e somente se, o termo constante de seu polinômio minimal é diferente de 0.

16. Seja $T : V \to V$ um operador linear inversível definido num espaço vetorial de dimensão finita. Mostre que

    (a) Se λ é um autovalor de T, então $\lambda \neq 0$.

    (b) λ é um autovalor de T se, e somente se λ^{-1} é autovalor de T^{-1}.

    (c) Se λ é um autovalor de T, mostre que a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade algébrica de $1/\lambda$.

17. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Seja $T : V \to V$ definido por

$$T(e_1) = e_2 - e_1, \quad T(e_2) = e_3 - e_1, \quad T(e_3) = e_3 - e_2.$$

    (a) Mostre que T não é diagonalizável.

    (b) Calcule T^{212} (dica: teorema de Cayley-Hamilton).

18. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $\det(A) \neq 0$. Use o teorema de Cayley-Hamilton para encontrar A^{-1} em termos de a, b, c, d. Em particular, calcule a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.