Curso de Verão 2018 - Tópicos de Álgebra Linear
Espaços dual, bi-dual e hiperplanos

1. Seja $V = \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Tome $f \in V^*$ um funcional linear qualquer. Mostre que existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, tais que
$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

2. Sejam A e B duas matrizes em $M(n, \mathbb{R})$ e seja Id a matriz identidade $n \times n$. Mostre que é impossível termos $AB - BA = Id$.

3. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Prove que V e V^* são isomorfos.

4. Seja $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,2,0), v_3 = (3,0,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Calcule a base dual $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.
   (b) Sejam $\pi_1, \pi_2, \pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por $\pi_1(x,y,z) = x$, $\pi_2(x,y,z) = y$ e $\pi_3(x,y,z) = z$. Escreva π_1, π_2, π_3 como combinação linear dos elementos da base $\mathcal{B}^*$.

5. Seja $\mathbb{R}_2[x]$ o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual 2. Dada $\mathcal{B} = \{1, 1+t, t+t^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$, determine a base dual $\mathcal{B}^*$.

6. Mostre que, dado $v \in V$ não-nulo, existe $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$.

7. Tome $\mathbb{R}^3$, espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Para $i = 1,2,3$, defina $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_1(x,y,z) = 2x - y$, $f_2(x,y,z) = x + y + z$, $f_3(x,y,z) = 2y + z$.
   (a) Mostre que f_1, f_2 e f_3 são funcionais lineares e formam uma base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
   (b) Encontre $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ base de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.

8. Seja $V = \mathbb{R}_2[x]$ e tome $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ definidos por
$$f_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\ dx, \quad f_2(p(x)) = \int_0^2 p(x)\ dx, \quad f_3(p(x)) = \int_{-1}^0 p(x)\ dx$$
   (a) Mostre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de V^*.
   (b) Exiba base de V da qual $\{f_1, f_2, f_3\}$ seja a base dual.

9. Sejam $u_1 = (1,0,1)$, $u_1 = (0,1,-2)$ e $u_1 = (-1,1,0)$ vetores em $\mathbb{R}^3$.
   (a) Verifique se o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente independente. Caso afirmativo, calcule a base dual $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.
   (b) Seja $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ um funcional linear, satisfazendo $f(u_1) = 1$, $f(u_2) = -1$ e $f(u_3) = 3$. Determine $f(x,y,z)$, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   (c) Se $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ é um funcional linear, tal que $f(u_1) = 0 = f(u_2)$ e $f(u_3) \neq 0$, mostre que $f(2,3,-1) \neq 0$.

10. Considere no $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ a base $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(1,1,1),(i,i,0)\}$. Determine $\mathcal{B}^*$.

11. Encontre um funcional linear não-nulo $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $f(3,2,1) = 0 = f(3,2,-1)$.

12. Seja $V = \mathbb{R}_n[x]$ o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual n. Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n$ elementos distintos de $\mathbb{R}$. Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, defina $f_i : V \to \mathbb{R}$ por $f_i(p(x)) = p(a_i)$.

    (a) Mostre que $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base de V^*.

    (b) Encontre a base de V da qual $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ é dual.

13. Dado um número natural $k \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{aligned} \phi_k : \mathbb{R}_n[x] &\to \mathbb{R} \\ p(x) &\longmapsto \int_{-1}^{1} x^k p(x)\ dx \end{aligned}$$

    Mostre que $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ é uma base de V^*.

14. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Tome $\{f_1, \ldots, f_n\} \in V^*$. Então o conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é LD se, e somente se,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Nuc}(f_i) \neq \{0\}.$$

15. Determine as bases duais e biduais de cada uma das seguintes bases de $\mathbb{R}^3$:

    (a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

    (b) $\{(1,1,1),(1,2,0),(3,0,0)\}$

    (c) $\{(1,-2,3),(1,-1,1),(2,-4,7)\}$

16. Mostre que os seguintes conjuntos são hiperplanos de $\mathbb{R}^3$:

    (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$

    (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

    (c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$

17. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $f \in V^* \backslash \{0\}$. Mostre que existe $v \in V \backslash \{0\}$, tal que $V = \mathrm{Nuc}(f) \oplus [v]$ ($[v]$ denota o subespaço de V gerado por v).

18. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, com $\dim(V) = n \geq 2$, e $f_1, f_2 \in V^* \backslash \{0\}$. Suponha $\mathrm{Nuc}(f_1) \neq \mathrm{Nuc}(f_2)$. Calcule as dimensões de $\mathrm{Nuc}(f_1)$, $\mathrm{Nuc}(f_2)$, $\mathrm{Nuc}(f_1) \cap \mathrm{Nuc}(f_2)$ e $\mathrm{Nuc}(f_1) + \mathrm{Nuc}(f_2)$.

19. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e sejam $f, g \in V^*$. Se $\mathrm{Nuc}(f) = \mathrm{Nuc}(g)$, então existe $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ tal que $f(u) = \lambda g(u)$, $\forall u \in V$.

20. Sejam U, V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e seja W um hiperplano de U. Mostre que se $T : U \to V$ é um isomorfismo, então $T(W)$ é um hiperplano de V.

21. Seja $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ espaço das funções contínuas definidas em $[0,1]$. Fixado $a \in [0,1]$, seja $V = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : f(a) = 0\}$.

    (a) V é um hiperplano?

    (b) O quociente $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})/V$ é isomorfo a qual espaço vetorial?

22. Prove que todo hiperplano em um espaço vetorial é núcleo de um funcional linear não-nulo.