Curso de Verão 2018 - Tópicos de Álgebra Linear - Lista 2

11 de janeiro de 2018

1. Sejam $b, c \in \mathbb{R}$. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$T(x, y, z) = (3x - 2y + 5z + 2b, 8x + cyz).$$
Prove que T é linear se, e somente se, $b = c = 0$.

2. Sejam $b, c \in \mathbb{R}$. Considere $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$T(p) = \left(3p(1) + p'(2) + bp(2)p(3), \int_{-1}^{1} x^3 p(x)dx + c\cos p(1)\right)$$
Prove que T é linear se, e somente se, $b = c = 0$.

3. Determinar base para Nuc T e Im T, o posto e a nulidade das seguintes transformações lineares:
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x)$.
   (b) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definida por $T(p(x)) = p'(x) + xp(x)$.
   (c) $T : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ definida por $T(p(x)) = -p''(x) + p(x)$.
   (d) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(p(x)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0)$.

4. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$\text{Nuc } T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

5. Determine uma transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, tal que satisfaça simultaneamente as seguintes condições:
   a) $1 + x^2 \in \text{Nuc } T$
   b) $1 \notin \text{Nuc } T$
   c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Im } T$.

6. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Prove que se $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ é l.i., então $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é l.i.

7. Encontre uma função $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que
$$\phi(w + z) = \phi(w) + \phi(z)$$
para todos $w, z \in \mathbb{C}$ sem que ϕ seja uma transformação linear (considerando $\mathbb{C}$ como espaço vetorial complexo).

8. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, com V de dimensão finita. Prove que se U é um subespaço de V e $S \in \mathcal{L}(U, W)$, então existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $Tu = Su$ para todo $u \in U$.

9. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 2$. Prove que existem $S, T \in \mathcal{L}(V, V)$ tais que $ST \neq TS$.

10. Encontre uma transformação linear T tal que $dim\,\mathrm{Nuc}\ T = 3$ e $dim\,\mathrm{Im}\ T = 2$.

11. Prove que
$$\{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4) \,:\, dim\,\mathrm{Nuc}\ T > 2\}$$
não é um subespaço de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$.

12. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to V$ uma transformação linear. Dizemos que T é *idempotente* se $T^2 = T$. Prove que se T é idempotente então $V = \mathrm{Nuc}\ T \oplus \mathrm{Im}\ T$.

13. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Prove que existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ injetora se, e somente se, $dim\,V \leq dim\,W$.

14. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, com V de dimensão finita. Prove que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ é sobrejetora se, e somente se, existe $S \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que TS é a função identidade em W.

15. Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$, onde V e W são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, com W de dimensão finita. Prove que $\mathrm{Nuc}\ T_1 \subseteq \mathrm{Nuc}\ T_2$ se, e somente se, existe $S \in \mathcal{L}(W, W)$ tal que $T_2 = ST_1$.

16. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Prove que se $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ satisfazem $\mathrm{Nuc}\ \phi_1 = \mathrm{Nuc}\ \phi_2$, então existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\phi_1 = \alpha\phi_2$.

17. Encontre transfomações lineares $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$ tais que $\mathrm{Nuc}\ T_1 = \mathrm{Nuc}\ T_2$ mas que T_1 não seja um múltiplo escalar de T_2.

18. Sejam V um espaço vetorial real e $T \in \mathcal{L}(V, V)$ tal que $T^2 = Id$. Sejam $W = \{v \in V \,:\, T(v) = v\}$ e $U = \{v \in V \,:\, T(v) = -v\}$. Prove que $V = W \oplus U$.

19. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n e seja $T \in \mathcal{L}(V, V)$ tal que $T^n = 0$ e $T^{n-1} \neq 0$. Seja $v \in V$ tal que $T^{n-1}(v) \neq 0$. Prove que o conjunto
$$B = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$$
é uma base de V.